СБОРНИК

ПАМЯТИ

АКАДЕМИКА

Д. А. ГРАВЕ

THE LIBRARY
OF
THE UNIVERSITY
OF CALIFORNIA
LOS ANGELES

АКАДЕМИЯ НАУК УССР

СБОРНИК

ПОСВЯЩЕННЫЙ ПАМЯТИ

АКАДЕМИКА

ДМИТРИЯ АЛЕКСАНДРОВИЧА ГРАВЕ

ПОД РЕДАКЦИЕЙ
Акад. О. Ю. Шмидта
чл.-кор. Академии Наук СССР Б. Н. Делоне
чл.-кор. Академии Наук СССР Н. Г. Чеботарева

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1940 ЛЕНИНГРАД

Сборник, посвященный памяти академика Дмитрия Александровича Граве. Государственное издательство технико-теоретической литературы 1940 г. Индекс Т 24-5-4. Изд. № 161.

★

Редактор *Д. А. Райков*
Технический редактор *Е. Г. Шпак*

★

Лист 1-й и полоса 326 сданы в набор 7/II 1940 г., подписаны к печати 20/IV 1940 г. Остальные листы сданы в набор 3/IX 1937 г., подписаны к печати 20/IV 1938 г. Формат 60×92/16. Объем: 10,68 бум. л., 20,5 печ. л. + 6 вклеек, 24,3 авт. л., 25,15 уч.-изд. л., 95 560 тип. знаков в бум. л. Тираж 2100 экз. Бумага Камской фабрики. Уполном. Главлита № Б-56134.

Набрано и сматрицировано в 1-й Образцовой тип. Огиза РСФСР треста „Полиграфкнига". Москва, Валовая, 28. Зак. № 688. Отпечатано с матриц.

Цена книги 8 р. Переплет 2 р.

Digitized by the Internet Archive
in 2015

https://archive.org/details/sbornikposviashc00shmi

Академик Д. А. Граве

(1863—1939)

Engineering &
Mathematical
Sciences
Library

QH 29
G78S7

АКАДЕМИК ДМИТРИЙ АЛЕКСАНДРОВИЧ ГРАВЕ

(1863—1939)

Н. Г. Чеботарев

19-го декабря 1939 года в Киеве скончался Дмитрий Александрович Граве, действительный член Украинской Академии наук, почетный член Академии наук СССР, награжденный орденом Трудового Красного знамени. Его смерть является большой утратой для математического мира, так как научная жизнь Д. А. Граве оставила глубокие и плодотворные следы. Д. А. Граве был автором многочисленных ценнейших исследований в различных областях математики, большого количества книг и монографий, на которых было воспитано несколько поколений математиков; он был создателем одной из крупнейших в Союзе математических школ, представители которой в настоящее время являются профессорами математики во многих крупных центрах Союза и продолжают научную деятельность в духе традиций школы Д. А. Граве: конкретность и четкость в постановке проблемы доведения их решений до конца.

Д. А. Граве родился в 1863 году в Петербурге. Рано лишившись отца, он со школьной скамьи должен был собственным трудом содержать себя и свою семью. Поступив в 1881 году в Петербургский университет, он окончил его в 1885 году, после чего был оставлен при университете „для приготовления к профессорскому званию", согласно тогдашней официальной терминологии. Одновременно он состоял преподавателем Института Путей Сообщения, а затем Высших женских курсов (Бестужевских). О преподавании в этих учебных заведениях у него сохранились богатые и яркие воспоминания, которыми он часто делился с учениками. Особенно любил он вспоминать про работу в путейском институте, где у него сотрудником был исключительно талантливый математик В. А. Марков (брат академика), умерший в молодом возрасте.

26 лет он защитил магистерскую диссертацию „Об интегрировании частных дифференциальных уравнений первого порядка", а 34 лет — докторскую „Об основных задачах математической теории построения географических карт". Вскоре после этого он был выбран профессором Харьковского университета. Пробыв в Харькове около 2 лет, он перешел в Киевский университет на место умершего там профессора Покровского и в Киеве оставался до конца своей жизни, если не считать большого перерыва, в течение которого Д. А. лечился за границей от туберкулеза.

В 1918 году в Киеве была основана Украинская Академия наук, в которую Д. А. был привлечен, как лучший математик Украины, в качестве

362116

одного из первых действительных членов. Отдавая научной работе массу времени и энергии, Д. А. Граве находил время и для общественной работы. Так, в 1923 году он был выбран членом Киевского горсовета. В 1929 году он был избран почетным членом Академии наук СССР.

В 1935 году математический мир и широкая общественность УССР и СССР организовали торжественное празднование 50-летнего юбилея его научно-педагогической деятельности. На юбилей в Киев съехались почти все его ученики и „внуки" (ученики учеников). Правительство СССР наградило его по случаю юбилея орденом Трудового Красного знамени. Д. А. чувствовал себя на юбилее очень бодро и строил планы о написании 17-томного „Трактата по алгебраическому анализу". Смерть помешала полному осуществлению этих планов: он успел написать только три тома.

§ 1. Математическое творчество Дмитрия Александровича с его первых шагов было направлено по руслу знаменитой „петербургской школы" академика Пафнутия Львовича Чебышева, находившейся в то время в полном расцвете. Непосредственное же влияние на его первые работы имел один из старейших учеников Чебышева профессор Александр Николаевич Коркин, в семинаре которого Д. А. получил первоначальный толчок к результатам своей магистерской диссертации „Об интегрировании частных дифференциальных уравнений первого порядка", написанной им в возрасте 26 лет. В этой диссертации Д. А. 1) обобщил так называемый второй метод Якоби (или метод Якоби-Майера) на случай, когда заданные уравнения содержат в явном виде искомую функцию V; 2) приложил метод Коркина к решению обобщенной задачи Коши: интегрировать замкнутую систему из g уравнений так, чтобы искомая функция обращалась при частных значениях g из переменных в произвольно заданную функцию остальных; при этом ему пришлось существенно изменить изложение метода Коркина, и оказалось, что метод Майера для линейных уравнений и новый метод Ли являются частными случаями метода Коркина; 3) рассмотрел уравнения задачи трех тел и решил задачу, поставленную Коркиным, о нахождении всех интегралов этой системы, не зависящих от закона действия сил. Для этого он берет эту систему в так называемых бертрановских координатах

$$u = x^2 + y^2 + z^2, \qquad u_1 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2, \qquad q = xx_1 + yy_1 + zz_1,$$

$$v = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2, \qquad v_1 = \xi_1^2 + \eta_1^2 + \zeta_1^2, \qquad s = \xi\xi_1 + \eta\eta_1 + \zeta\zeta_1,$$

$$w = x\xi + y\eta + z\zeta, \qquad w_1 = x_1\xi_1 + y_1\eta_1 + z_1\zeta_1,$$

$$r = x_1\xi + y_1\eta + z_1\zeta, \qquad r_1 = x\xi_1 + y\eta_1 + z\zeta_1,$$

которые связаны зависимостью

$$\begin{vmatrix} u & q & w & r_1 \\ q & u_1 & r & w_1 \\ w & r & v & s \\ r_1 & w_1 & s & v_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Д. А. Граве
в студенческие годы.

Уравнения системы принимают вид

$$\frac{du}{dt}=\frac{2w}{m},\qquad \frac{du_1}{dt}=\frac{2w_1}{m},\qquad \frac{dq}{dt}=\frac{r}{m}+\frac{r_1}{m_1},$$

$$\frac{dv}{dt}=2\alpha w+2\beta r,\qquad \frac{dv_1}{dt}=2\alpha_1 w_1+2\beta r_1,$$

$$\frac{dw}{dt}=\frac{v}{m}+\alpha u+\beta q,\qquad \frac{dw_1}{dt}=\frac{v_1}{m_1}+\alpha_1 u_1+\beta q,$$

$$\frac{dr}{dt}=\frac{s}{m_1}+\alpha q+\beta u_1,\qquad \frac{dr_1}{dt}=\frac{s}{m}+\alpha_1 q+\beta u,$$

$$\frac{ds}{dt}=\alpha_1 r+\alpha r_1+\beta(w+w_1),$$

где α, α_1, β — коэфициенты, зависящие от закона действия сил. Таким образом, если V — искомый интеграл, то, приравнивая нулю его полную производную, выраженную при помощи этих уравнений, Д. А. получает неоднородную линейную функцию от α, α_1, β. Приравнивая нулю коэфициенты этой функции, он получает для V систему из четырех частных уравнений. Их интегрирование представляло большие трудности в силу большого количества неизвестных и сложности самих уравнений. Решив эту задачу, Д. А. выказал в полном блеске высоту выкладочной техники, которой отличаются все его лучшие работы и которая впоследствии дала ему возможность решить несколько труднейших проблем, стоявших на очереди в математике той эпохи.

В этой работе уже в полной мере выявились математические вкусы Д. А. к конкретной математике, которая не удовлетворяется доказательствами существования, а всегда ищет алгорифмов для получения решений на самом деле. Такое направление было вообще характерно для петербургской школы, представители которой любили считать себя преемниками Эйлера.

§ 2. Докторская диссертация Д. А. Граве „Об основных задачах математической теории построения географических карт“ вышла в свет лишь в 1896 г., т. е. через семь лет после магистерской. Но это была диссертация! В ней был решен целый ряд фундаментальных проблем дифференциальной геометрии, имеющих приложение к черчению карт. В числе этих проблем содержатся следующие:

I. Нахождение всех эквивалентных (т. е. сохраняющих площади) проекций шара на плоскость, которые изображают меридианы и параллели прямыми или окружностями. Эта задача была решена Лагранжем для случая конформных проекций. Ее практическое значение заключается в том, что вычерчивать для карт меридианы и параллели в виде кривых, отличных от прямых и окружностей, технически весьма сложно.

Д. А. решил эту задачу двумя (не слишком отличающимися друг от друга) способами, из которых второй был помещен в Journal de mathématiques (5-я серия, т. 2, 1896). Приведем основную идею этого способа и результаты, к которым пришел Д. А.

Пусть $x=\varphi(u, v)$, $y=\psi(u, v)$ будут координаты проекции точки (u, v) произвольной поверхности с гауссовыми координатами u, v и элементом дуги

$$ds^2=Edu^2+2Fdudv+Gdv^2. \tag{1}$$

Условие эквивалентности проекции запишется в форме

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial v}-\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial\psi}{\partial u}=K\sqrt{EG-F^2}, \tag{2}$$

где K — постоянная. Для поверхности вращения можно взять уравнения в форме $x=\varphi(u)\cos v$, $y=\varphi(u)\sin v$, $z=u$, где u — функция широты, пока произвольная, а v — долгота. Тогда

$$E=1+[\varphi'(u)]^2,\quad F=0,\quad G=[\varphi(u)]^2, \tag{3}$$

и уравнение (1) примет вид

$$\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}-\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}=\Omega(u). \tag{4}$$

Меняя функцию u широты, можно привести это уравнение к виду

$$\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}-\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}=1 \tag{5}$$

и таким образом решать задачу не для шара, а для произвольной поверхности вращения, форма которой не отражается на искомом решении.

Д. А. расчленяет задачу на две: 1) изображение меридианов в виде прямых, 2) изображение меридианов в виде кругов.

1) В первом случае пусть Σ будет огибающая меридианов (случай параллельных и пересекающихся в одной точке меридианов рассматривается особо). Обозначая через a, b ее координаты, рассматриваемые как функции от v и подчиненные равенству

$$a'^2+b'^2=1$$

здесь мы пользуемся произволом в выборе функции v, но зато берем условие эквивалентности в форме

$$x_v y_u-x_u y_v=V, \tag{6}$$

а не в форме (5)], мы можем представить координаты точек меридиана так:

$$x=a+\rho a',\quad y=b+\rho b', \tag{7}$$

где ρ — функция от y и v.

Легко получить равенство $\rho^2\mu=2u+w$, где μ и w — функции от v.

Обозначая через x', y', ... производные по v, мы должны подчинить параллели $u=\text{const}$ дифференциальному уравнению кругов

$$3(x'x''+y'y'')(x'y''-x''y')-(x'^2+y'^2)(x'y'''-x'''y')=0. \tag{8}$$

Подставляя значения x и y из (7), Д. А. после сложных выкладок, упрощаемых путем остроумных подстановок, получает все возможные формы проекций.

2) Во втором случае Д. А. берет уравнения меридианов на карте в форме

$$x=a+\rho\cos\varphi,\quad y=b+\rho\sin\varphi, \tag{9}$$

где a, b, ρ зависят только от v, а φ — от u, v. Без труда [при помощи (5)] получается соотношение

$$\rho a'\sin\varphi-\rho b'\cos\varphi+\rho\rho'\varphi=u+w.$$

Опять пользуемся уравнением (8), что после еще более трудных выкладок дает все возможные формы проекций.

Я считаю уместным привести все полученные Д. А. типы проекций, где функция $u(v)$ взята так, чтобы удовлетворялось уравнение (5):

I. $\left.\begin{aligned} x &= au + \alpha v \\ y &= bu + \beta v \end{aligned}\right\}\ a\beta - \alpha b = 1.$

II. $\left.\begin{aligned} x &= (av + b)\sqrt{2ku + l} \\ y &= (\alpha v + \beta)\sqrt{2ku + l} \end{aligned}\right\}\ k(a\beta - \alpha b) = 1.$

III. $\left.\begin{aligned} x &= (au + b)\sqrt{2kv + l} \\ y &= (\alpha u + \beta)\sqrt{2kv + l} \end{aligned}\right\}\ k(b\alpha - a\beta) = 1.$

IV. $\begin{cases} x = a - \dfrac{u + w}{b}, \\ y = bv + \beta + \dfrac{1}{b}\sqrt{b^2\rho^2 - (u + w)^2}. \end{cases}$

V. $\begin{cases} x = a - \dfrac{v + w}{b}, \\ y = bu + \beta + \dfrac{1}{b}\sqrt{b^2\rho^2 - (v + w)^2}. \end{cases}$

VI. $\begin{cases} x = \delta\cos\dfrac{u + \varepsilon}{k} - \sin\dfrac{u + \varepsilon}{k}\sqrt{2kv + l}, \\ y = \delta\sin\dfrac{u + \varepsilon}{k} - \cos\dfrac{u + \varepsilon}{k}\sqrt{2kv + l}. \end{cases}$

VII. $\begin{cases} x = \delta\cos\dfrac{v + \varepsilon}{k} - \sin\dfrac{v + \varepsilon}{k}\sqrt{2ku + l}, \\ y = \delta\sin\dfrac{v + \varepsilon}{k} + \cos\dfrac{v + \varepsilon}{k}\sqrt{2ku + l}. \end{cases}$

VIII. $\begin{cases} x = \sqrt{2kv + l}\left(\dfrac{\lambda}{k} + \cos\varphi\right), \\ y = \sqrt{2kv + l}\left(\dfrac{\mu}{k} + \sin\varphi\right), \\ \text{где } \lambda\sin\varphi - \mu\cos\varphi + k\varphi = u + \sigma. \end{cases}$

IX. $\begin{cases} x = \sqrt{2ku + l}\left(\dfrac{\lambda}{k} + \cos\varphi\right), \\ y = \sqrt{2ku + l}\left(\dfrac{\mu}{k} + \sin\varphi\right), \\ \text{где } \lambda\sin\varphi - \mu\cos\varphi + k\varphi = v + \sigma. \end{cases}$

X. $\begin{cases} x = \cos\dfrac{u + \varepsilon}{k}\cdot\dfrac{\rho^2 + A^2 - R^2}{2A} - \sin\dfrac{u + \varepsilon}{k}\cdot\dfrac{\Delta}{2A}, \\ y = \sin\dfrac{u + \varepsilon}{k}\cdot\dfrac{\rho^2 + A^2 - R^2}{2A} + \cos\dfrac{u + \varepsilon}{k}\cdot\dfrac{\Delta}{2A}, \\ \text{где } \rho = \sqrt{2kv + l},\ \Delta = \sqrt{4A^2\rho^2 - (\rho^2 + A^2 - R^2)^2}. \end{cases}$

$$\text{XI.}\quad \begin{cases} x = \cos\dfrac{v+\varepsilon}{k}\cdot\dfrac{\rho^2+A^2-R^2}{2A} - \sin\dfrac{v+\varepsilon}{k}\cdot\dfrac{\Delta}{2A}, \\ y = \sin\dfrac{v+\varepsilon}{k}\cdot\dfrac{\rho^2+A^2-R^2}{2A} + \cos\dfrac{v+\varepsilon}{k}\cdot\dfrac{\Delta}{2A}, \\ \text{где } \rho = \sqrt{2ku+l},\ \Delta = \sqrt{4A^2\rho^2-(\rho^2+A^2-R^2)^2}. \end{cases}$$

Эта работа произвела громадное впечатление. Один из крупнейших математиков той эпохи Эрмит (Ch. Hermite) написал Д. А.: „Je vous félicite au point de vue algébriste", имея в виду, конечно, проявленное Д. А. необычайное искусство в алгебраических выкладках.

II. Вторая решенная в диссертации Д. А. задача имеет еще большее принципиальное значение для математиков. Это — решение задачи на экстремум нового типа, предложенной П. Л. Чебышевым в следующей формулировке:

«Окончательное решение о наивыгоднейшей проекции карт очень просто: наивыгоднейшая проекция для изображения какой-нибудь части земной поверхности на карте есть та, в которой на границе изображения масштаб сохраняет одну и ту же величину, легко определяемую по принятой, нормальной величине масштаба». (Сочинения П. Л. Чебышева, т. I, стр. 242, Петербург 1899).

Д. А. доказал это утверждение, приведенное Чебышевым без доказательства. Впоследствии он распространил свое доказательство на произвольные поверхности, имеющие гауссову кривизну постоянного знака. В то же время самое доказательство сильно упростилось. Оно опубликовано в Journal für die reine und angewandte Mathematik, т. 140 (1911). Его идея заключается в следующем. Представим линейный элемент заданной поверхности в изотермических координатах: $ds^2 = \lambda^2(du^2+dv^2)$.

Тогда всякая конформная (а о таких только и идет речь) проекция поверхности на плоскость (x, y) выразится формулой

$$x+iy = f(u+iv),$$

а масштаб — формулой

$$m = \frac{|f'(u+iv)|}{\lambda}.$$

Отсюда, вводя обозначение

$$H = \ln|f'(u+iv)| = \frac{1}{2}\ln f'(u+iv) + \frac{1}{2}\ln f'(u-iv),$$

мы получим $\ln m = H - \ln\lambda$.

H, будучи вещественной частью от аналитической функции $\ln f'(u+iv)$, является гармонической функцией, а потому в силу известной теоремы не принимает во внутренних точках областей экстремальных значений.

Это же отчасти имеет место и для функции $H - \ln\lambda$. В самом деле, если, например, гауссова кривизна K положительна и во внутренней точке $H - \ln\lambda$ достигало бы максимума, то мы имели бы

$$\frac{\partial^2(H-\ln\lambda)}{\partial u^2} \leqslant 0, \quad \frac{\partial^2(H-\ln\lambda)}{\partial v^2} \leqslant 0;$$

складывая, мы получили бы $\dfrac{\partial^2\ln\lambda}{\partial u^2} + \dfrac{\partial^2\ln\lambda}{\partial v^2} \geqslant 0$.

Д. А. Граве в 1896 г.

Но из гауссовой theorema egregium легко получается формула

$$\lambda^2 K = -\left(\frac{\partial^2 \ln \lambda}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \ln \lambda}{\partial v^2}\right),$$

и наше неравенство приобрело бы вид $\lambda^4 K \leqslant 0$, что противоречит предположению. Аналогично доказывается в случае отрицательной гауссовой кривизны отсутствие минимумов.

Пусть на заданном контуре функция $H - \ln \lambda$ равна нулю. Тогда при $K > 0$ она отрицательна внутри контура. Требуется доказать, что амплитуда (т. е. разность между наибольшим и наименьшим значениями) функции $H - \ln \lambda$ меньше, чем для любой другой функции типа $H_1 - \ln \lambda$. Если наибольшее значение последней есть A, то функция $H_2 - \ln \lambda = H_1 - A - \ln \lambda$ имеет ту же амплитуду и принимает внутри и на контуре только неположительные значения. Остается доказать, что функция $H_2 - \ln \lambda$ имеет меньший минимум, чем $H - \ln \lambda$. Это следует из того, что разность

$$H - \ln \lambda - (H_2 - \ln \lambda) = H - H_2,$$

будучи гармонической функцией и принимая на контуре только положительные значения, не может принимать отрицательных значений и внутри контура.

Это весьма простое рассуждение, однако, потребовало для своего открытия немалого промежутка времени (с 1856 по 1911 г.) и усилий многих лучших представителей чебышевской школы.

На диспуте один из оппонентов Д. А., академик А. А. Марков, указал на недостаточность его результата, в котором отсутствовало доказательство существования искомой наилучшей проекции. Путь к этому доказательству был намечен впоследствии профессором Шварцем. Но попытки найти этот путь, а также первоначальная редакция доказательства потребовали от Д. А. углубления в основы общей теории функций вещественного переменного — направление, чуждое чебышевской школе.

III. В той же диссертации был дан новый способ решения задачи Дирихле для алгебраических контуров. Этот способ основан на введении комплексных переменных и на формальных преобразованиях. Он весьма практичен для тех случаев, в которых он применим. Кроме того, исходя из задачи Дирихле, Д. А. предложил новую классификацию алгебраических кривых, которая по мнению авторитетов была бы достойна подробной разработки.

IV. Наконец, был решен большой ряд частных задач по картографии, для чего тоже потребовалось немало остроумия.

Эта диссертация, воспроизведенная по частям в виде статей, помещенных в лучших математических журналах, создала Д. А. репутацию крупного ученого.

§ 3. Из других работ этого периода (который можно назвать петербургским периодом деятельности Д. А.) обращает на себя внимание его работа „Об основных предложениях теории функций двух вещественных переменных“ (Харьков, 1898). В первой ее части Д. А. развивает теорию „фигур maximi“, примыкающую к исследованиям Минковского по теории выпуклых тел. Во второй части Д. А. строит особые „полиэдральные“ функции,

обладающие замечательными свойствами. Они определяются так. Всякое число $x>0$ может быть однозначно представлено в виде ряда

$$x=a_0+\sum_{i=1}^{\infty}\frac{a_i}{n^i},$$

где $a_0, a_1, a_2, \ldots$ — целые неотрицательные числа, причем при $i\geqslant 1$ $a_i<n$; n будем предполагать нечетным. Если в ряде $a_1, a_2, \ldots$ не встречается нечетных чисел, положим $b_i=\frac{a_i}{2}$ и определим функцию $\vartheta(x)$ так

(1) $$\vartheta(x)=a_0+\sum_{i=1}^{\infty}\frac{b_i}{m^i},$$

где $n=2m-1$. Если же a_k — первое нечетное число этого ряда, то положим

$$b_i=\frac{a_i}{2}\ (i\leqslant k-1),\quad b_k=\frac{a_k+1}{2},\quad b_i=0\ (i>k),$$

и определим функцию $\vartheta(x)$ опять рядом (1). Функция $\vartheta(x)$ — неубывающая и непрерывная. Она принимает значение

$$y=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{b_i}{m^i}\quad\text{в точке}\quad x=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{2b_i}{n^i},$$

если существует бесконечно много чисел $b_i>0$, и в целом интервал

$$\left(\sum_{i=1}^{k-1}\frac{2b_i}{n^i}+\frac{2b_k-1}{n^k},\quad\sum_{i=1}^{k}\frac{2b_i}{n^i}\right)$$

— в противном случае. Д. А. называет такие интервалы *промежутками неизменяемости* функции $\vartheta(x)$.

Если в ряде $a_1, a_2, \ldots$ встречаются нечетные числа, то $\vartheta'(x)=0$. В противном случае производной не существует.

Особенно интересно вычисление определенного интеграла. Чтобы определить функцию

$$\omega(x)=\int_0^x\vartheta(x)\,dx,$$

Д. А. подсчитывает сумму длин промежутков неизменяемости, умножаемых на значения $\vartheta(x)$ в этих промежутках, и получает для случая существования нечетных a_i

$$\omega(x)=\frac{a_0^2}{2}+a_0\sum_{i=1}^{\infty}\frac{a_i}{n^i}+\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{k}\frac{a_i(a_i+1)}{n^i m^i}+\sum_{l=1}^{k}\frac{b_l}{m^l}\sum_{m=l+1}^{\infty}\frac{a_i}{n^i}$$

и аналогичную сумму для другого случая. Таким образом за несколько лет до открытия Лебега он пользуется его приемом интегрирования. При этом весьма характерен для чебышевской школы путь, по которому пришел Д. А. к своему результату: не вдаваясь в абстрактные определения, он проводит свои методы на строго конкретном примере.

Однако продолжение пути по линии обобщений основных понятий анализа, повидимому, противоречило математическим вкусам и установкам Д. А. По крайней мере Д. А. больше не писал статей в этом направлении. Вообще в первые годы XX в. Д. А. почти не писал статей. Можно думать, что в его научной деятельности наступил кризис. Кроме того, продолжительная болезнь (туберкулез) и долговременное пребывание в заграничных санаториях оторвали его от тематики первого периода.

§ 4. Второй период подъема творческой деятельности Д. А. начинается с 1908—1910 гг., когда он был уже профессором Киевского университета. Находясь за границей, Д. А. увлекся современным направлением в алгебре и теории чисел и передал это увлечение своим многочисленным ученикам, организовав, таким образом, вокруг себя сильную школу молодых алгебраистов.

Самостоятельные работы Д. А. в этот период большей частью носят характер методических упрощений; они частью бывают весьма изящны, но не имеют принципиального значения. Этот факт легко понять, принимая во внимание, что Д. А. отдавал всю свою энергию и весь свой энтузиазм на создание школы. Из этих работ следует упомянуть: весьма изящное упрощение основ теории Галуа, резко подчеркивающее различие между буквенными и численными уравнениями и пользующееся вспомогательными неопределенными переменными; упрощение изложения основ теории идеалов при помощи функционалов (по Веберу); вывод знака у гауссовой суммы

$$\psi(2\mu, n) = \sum_{s=0}^{n-1} e^{s^2 \frac{2\mu\pi i}{n}},$$

упрощающий и без того наиболее простой вывод Мертенса; новое тождество в теории квадратичных форм, при помощи которого легко выводится существование форм anceps, и много других работ.

Особо отметим работу „Sur les équations du cinquième degré résolubles algébriquement, quand le produit des racines reste arbitraire“ (Bull. des Sciences Mathématiques, 2-я серия, т. 34, 1910). В ней Д. А. получает два класса уравнений пятой степени:

$$x^5 + s = 0,$$
$$x^5 + 10px^3 + 20p^2x + s = 0,$$

которые разрешимы при произвольном значении свободного члена.

К этому же периоду относится написание Д. А. большого количества курсов: „Теория групп“, „Элементарный курс теории чисел“, „Элементы теории эллиптических функций“, „Основы аналитической геометрии“, „Энциклопедия математики“, „Математика страхового дела“, „Элементы высшей алгебры“ и др. Эти книги пользовались большой популярностью среди учащейся молодежи, так как они всегда отличались свежестью и новизной материала, живым и легким изложением, и, что самое главное, в них Д. А. умел вложить тот энтузиазм, которым он обладал в высокой степени. Возьмем, например, его „Теорию чисел“. В ней содержатся основы теории групп, алгебраических чисел, матриц, арифметических функций, и в то же время дается классическая теория

форм и непрерывных дробей. Все эти теории преподнесены так, что читатель получает ясное понятие о целях как классической, так и современной теории чисел. А вот книга совсем другого стиля: „Энциклопедия математики". Она имеет целью представить в живом и связном изложении образованному читателю, не занимающемуся математикой, цели и основные методы математического исследования. Трудно представить себе столь богатый и разнообразный материал, сконцентрированный в сравнительно небольшой книжке (601 стр.). Здесь читатель может довольно обстоятельно познакомиться и с аналитической геометрией и с диференциальным и интегральным исчислением, и с теорией чисел, получить понятие о невозможных задачах в математике, о наименее уклоняющихся от нуля полиномах, о черчении карт, о математической физике, о теории вероятностей и об устройстве и математических принципах рулетки в Монте-Карло и т. д.

Можно без особого преувеличения сказать, что книги Д. А. воспитали и привили вкус к математике большинству современных математиков Союза.

§ 5. Так как главное значение второго периода деятельности Д. А. состоит в создании математической школы, то я считаю уместным остановиться на этом подробнее. Создание крупной математической школы в дореволюционное время, притом в провинциальном центре, является исключительным, почти единичным фактом в истории русской математики, и было бы весьма ценно детально вскрыть причины, благоприятствовавшие ее возникновению.

Основное отличие отношения Д. А. к процессу формирования научного работника от отношения большинства других профессоров состояло в том, что Д. А. приучал молодежь к самостоятельной исследовательской работе с самого начала, не заботясь об эрудиции ученика, которая приходила впоследствии сама собой. В связи с этим он относился враждебно к существованию магистерских экзаменов, которые по его мнению отвлекали молодых ученых от исследовательской деятельности и всегда советовал своим ученикам не уделять им слишком много времени.

В выборе темы Д. А. проявлял большую смелость, давая ученикам большие отделы алгебры, в которых они сами должны были искать нерешенные задачи. При этом он всегда рекомендовал сразу брать для разрешения трудные вопросы, и это большей частью приводило к прекрасным результатам.

Исключительно велико также количество студентов, которых Д. А. ежегодно оставлял при университете, справедливо считая, что отбор научных работников должен производиться не в процессе учебы, а в процессе творческой работы. При этом ему часто приходилось выдерживать упорную борьбу в университетском совете, отстаивая своих учеников, которые не всегда удовлетворяли формальным требованиям, необходимым для оставления их при университете. Нередко он выслушивал от своих коллег суждения, что он „набирает себе учеников с улицы". Время сыграло в его пользу, доказав, что из этих „подобранных с улицы" учеников могут выработаться первоклассные ученые.

Наконец, в деле организации школы решающую роль сыграло создание им семинара, где Д. А. сумел наладить научную работу со студен-

Д. А. Граве в 1912 г.

(Геттинген)

ами, которые докладывали на заседаниях этого семинара самостоятельные научные исследования. К сожалению, мне не пришлось принимать участия в его семинаре в самый блестящий период его деятельности — 1910—1911 гг., когда были выращены Б. Н. Делоне, Е. И. Жилинский, А. М. Островский, О. Ю. Шмидт и др.

В настоящее время большинство его учеников являются самостоятельными учеными и уже имеют собственных учеников. Попытаюсь перечислить основные результаты, добытые его школой в целом.

По теории групп (О. Ю. Шмидт и его ученики) — первоклассная монография О. Ю. Шмидта; принятое во всех современных курсах его простое доказательство теоремы Ремака; исследования по разрешимым группам; исследования по цепям Жордана-Гельдера для бесконечных групп; замечательная „теорема Кулакова" о p-группах; новые соотношения между характерами (А. А. Кулаков); новые критерии разрешимости групп (А. П. Дицман, А. А. Кулаков, В. К. Туркин, С. А. Чунихин).

По диофантовому анализу — решение неопределенных кубических уравнений (Б. Н. Делоне); обобщение его методов на уравнения высших степеней (В. А. Тартаковский, Д. К. Фаддеев); доказательство теоремы: всякое невырождающееся уравнение $f(x_1, \ldots, x_m) = k$, где f — форма n-й степени, а m — достаточно большое число, всегда имеет решение, если имеют решения все сравнения $f \equiv k \pmod{p^s}$, где p — простые числа, s сколь угодно велико" (В. А. Тартаковский).

По геометрии чисел — перечисление всех правильных систем в четырехмерном пространстве (Б. Н. Делоне).

По непрерывным группам — доказательство того, что всякую группу Ли можно представить в виде группы линейных подстановок (И. Д. Адо).

По теории алгебраических чисел — доказательство существования простых чисел, принадлежащих к заданному классу подстановок (Н. Г. Чеботарев); доказательство того, что индекс поля меньше его степени (Е. И. Жилинский).

По теории абстрактных полей — первое доказательство того, что абсолютные значения и p-адические оценки (Bewertung) величин поля являются единственными возможными их оценками (А. М. Островский).

По наименее уклоняющимся от нуля полиномам — нахождение наименее уклоняющихся от нуля полиномов при трех фиксированных коэффициентах с помощью автоморфных функций (Н. И. Ахиезер).

По интегральным уравнениям — исследование линейных интегральных уравнений типа Фредгольма с так называемым осциллирующим ядром (М. Г. Крейн, Ф. Р. Гантмахер).

§ 6. Третий период деятельности Д. А., можно считать, начинается вскоре после революции. Он характеризуется переключением ее на механику и вообще прикладную математику. В этих областях Д. А. развивает поразительно разностороннюю творческую работу. Из чисто математических работ, близких к математической физике, в первую очередь необходимо упомянуть о его работе „Über die linearen Differentialgleichungen, die in bezug auf die lineare gebrochene Transformationsgruppe invariant sind" (Journal für die reine und angewandte Mathematik, т. 156, 1927), которой Д. А. решил весьма общую задачу нахождения линейных дифференциальных выражений, инвариантных относительно преобразований

дробной линейной группы. Задача решается посредством громадных выкладок, весьма остроумно расположенных. Представляет также интерес его небольшая работа „Über eine Tschebyscheffsche Frage“ (Львов, Збірн. Мат.-Прир. Секції Наук. Т-ва ім. Шевченка, 1927), в которой Д. А. предложил изящный алгорифм для решения задачи покрытия шара сеткой. Здесь решение уравнения $\frac{\partial^2 \alpha}{\partial u \partial v} = -\sin \alpha$ приближенно заменяется решением разностного уравнения, причем последовательные решения получаются одно из другого при помощи формул, выведенных из сферической тригонометрии.

Кроме того, Д. А. написал несколько работ по технической механике; по небесной механике, где, вводя в рассмотрение электромагнитные силы, он дал качественное объяснение неравенств движения перигелиев планет, получив для них величины, пропорциональные наблюдаемым; по магнитным возмущениям; по коррозии металлов и т. д. Поразительна разносторонняя образованность Д. А. в областях, смежных с математикой, и свежесть мысли, которая всегда характеризует его работы.

§ 7. В последнее время Д. А. опять возвратился к теории чисел и алгебре. В этот период он часто возвращается к темам, которые занимали его в ранний период увлечения теорией чисел и алгеброй: сюда относятся, например, его работы по основаниям теории Галуа и теории идеалов. Интересны его работы „Про деякі квадратичні поля“ и „Про прості числа виду $p = 4n + 3$“, в которых Д. А. проделывает колоссальные вычисления, связанные с определением числа классов квадратичных полей.

С последним периодом жизни Д. А. связано также составление его „Трактата по алгебраическому анализу“, три тома которого Д. А. успел написать до смерти. Это сочинение, содержащее в своих первых томах элементарный материал, ценно тем, что вводит читателя, пользуясь элементарными средствами, в круг современных идей по алгебре, содержащий в то же время много важного, но полузабытого материала, которого не найти ни в каких других руководствах: теорема В. Маркова, многоугольник Ньютона и т. д.

Д. А. Граве прожил всего 76 лет, до конца жизни не переставая работать на пользу советской науки. Его жизнь будет долго служить примером для новых поколений советских ученых.

О НЕКОТОРЫХ ФОРМУЛАХ КВАДРАТУР П. ЧЕБЫШЕВА И А. МАРКОВА.

Н. И. Ахиезер (Харьков) и М. Г. Крейн (Одесса).

§ 1. В работе „Sur les quadratures“ [1]) П. Чебышевым была поставлена задача, которая может быть сформулирована так:

В интервале (a, b) *задана функция* $q(x)$, *для которой*

$$\int_a^b q(x)\,dx = 0.$$

Нужно подобрать вещественное число K *и точки* α_i, β_i $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$ *внутри интервала* (a, b) *так, чтобы для каждого полинома* $P(x)$ *степени* $\leqslant 2n-1$ *имело место равенство*

$$\int_a^b P(x)\,q(x)\,dx = K \sum_{i=1}^{n-1} \{P(\alpha_i) - P(\beta_i)\}. \tag{1}$$

Для решения этой задачи П. Чебышев рассматривает величины

$$c_k = \int_a^b x^k q(x)\,dx \quad (k = 1, 2, \ldots, 2n-1) \tag{2}$$

и полагает

$$\exp\left\{\frac{1}{L}\left[\frac{c_1}{z} + \frac{c_2}{2z^2} + \ldots + \frac{c_{2n-1}}{(2n-1)\,z^{2n-1}}\right]\right\} = 1 + \frac{t_0(L)}{z} + \ldots \tag{3}$$

$$\ldots + \frac{t_{2n-2}(L)}{z^{2n-1}} + \ldots$$

Небольшое исследование приводит тогда к такому заключению: если выполняется формула квадратур (1), то рациональная функция

$$\frac{\psi(z)}{\varphi(z)} = \frac{(z-\beta_1)(z-\beta_2)\ldots(z-\beta_{n-1})}{(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\ldots(z-\alpha_{n-1})}$$

может быть разложена по убывающим степеням величины z, и это разложение совпадает при $L = K$ вплоть до члена $\frac{t_{2n-2}(K)}{z^{2n-1}}$ с разложением (3). Но существование подобной рациональной функции $\frac{\psi(z)}{\varphi(z)}$ возможно только тогда, когда K удовлетворяет некоторому алгебраическому урав-

[1]) Journal de mathématiques pures et appliquées, II série, т. XIX (1874), стр. 19—34.

нению. Это уравнение, которое самим Чебышевым не было указано в явной форме, имеет вид

$$\frac{\Delta_{n-1}(L)\,\Delta_{n-3}(L)}{\Delta^2_{n-2}(L)} = 0, \tag{4}$$

где под $\Delta_k(L)$ понимается детерминант

$$\Delta_k(L) = \begin{vmatrix} t_0(L) & t_1(L) & \dots & t_k(L) \\ t_1(L) & t_2(L) & \dots & t_{k+1}(L) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ t_k(L) & t_{k+1}(L) & \dots & t_{2k}(L) \end{vmatrix}. \tag{5}$$

Если K найдено из уравнения (4), то, согласно Чебышеву, остается только взять за $\frac{\psi(z)}{\varphi(z)}$ $(n-1)$-ю подходящую дробь ассоциированной (при $z=k$) с рядом (3) непрерывной дроби; этим будут определены и числа α_i, β_i, причем $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}$ оказываются нулями полинома $\Delta_{n-1}(z; K)$, а $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n-1}$ — нулями полинома $\Delta_{n-1}(z; -K)$, где

$$\Delta_k(z; L) = \begin{vmatrix} t_0(L) & t_1(L) & \dots & t_k(L) \\ t_1(L) & t_2(L) & \dots & t_{k+1}(L) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ t_{k-1}(L) & t_k(L) & \dots & t_{2k-1}(L) \\ 1 & z & \dots & z^k \end{vmatrix} \tag{6}$$

и K — рассматриваемый корень уравнения (4).

Этот метод был проиллюстрирован Чебышевым несколькими примерами, однако Чебышев не исследовал:

1) всегда ли уравнение (4) имеет вещественные корни;

2) соответствует ли какому-либо вещественному корню K этого уравнения подходящая дробь $\frac{\psi(z)}{\varphi(z)}$, числитель и знаменатель которой суть полиномы в точности $(n-1)$-й степени (нужно заметить, что для одного из рассматриваемых K некоторые из неполных частных непрерывной дроби могут быть нелинейными);

3) будут ли нули полиномов $\varphi(z)$, $\psi(z)$ для рассматриваемого K простыми или кратными и лежат ли они в интервале (a, b).

Можно на простых примерах показать, что эти вопросы не всегда имеют положительное решение [2]), поэтому возникает вопрос, каким условиям должны удовлетворять числа $c_1, c_2, \dots, c_{2n-1}$, чтобы для $q(x)$ имела место формула квадратур (1).

---

[2]) Если положить, например, $q(x) = Ax + Bx^3 + Cx^5$ и определить коэффициенты A, B, C из условий $c_1 = 1$, $c_2 = c_3 = c_4 = 0$, $c_5 = -5$ (беря, скажем, $a = -1$, $b = 1$), то после нетрудных вычислений для $n = 3$ получим

$$\Delta_2(L) = \frac{\text{const}}{L^5}\left(\frac{1}{L^4} - 720\right), \quad \Delta_2(z; L) = \text{const}\left(z^2 - \frac{z}{2L} + \frac{1}{12L^2}\right)$$

и, следовательно,

$$\alpha_{1,2} = \frac{1}{4L}\left(1 \pm \frac{i}{\sqrt{3}}\right).$$

В связи с этим особое значение имеют исследования А. Маркова [3]), который показал, что для большого класса функций $q(x)$ всегда существуют формулы квадратур (1) (с $a \leqslant \alpha_i \leqslant b$, $a \leqslant \beta_i \leqslant b$ и вещественным K), если только потребовать их выполнения не для всех полиномов степени $\leqslant 2n-1$, а только для всех полиномов $Q(x)$ степени $\leqslant 2n-2$.

У А. Маркова число искомых величин K, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}$, $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{n-1}$ на единицу больше числа заданных величин $c_1, c_2, \ldots, c_{2n-2}$; поэтому Марков строит не одну, а бесконечное множество формул квадратур вида (1), каждая из которых соответствует особому значению K (из некоторого множества).

Все формулы Маркова обладают тем свойством, что

$$a \leqslant \beta_1 \leqslant \alpha_1 \leqslant \beta_2 \leqslant \ldots \leqslant \beta_{n-1} \leqslant \alpha_{n-1} \leqslant b.$$

Мы будем говорить, что *функция* $q(x)$ $(a < x < b, -\infty \leqslant a < b \leqslant \infty)$ *допускает формулу квадратур Маркова порядка* $2n-2$, *если интегралы*

$$c_i = \int_a^b x^i q(x)\, dx \quad (i = 0,\ 1,\ 2, \ldots,\ 2n-2;\ c_0 = 0)$$

существуют и имеются такие числа $a \leqslant \beta_1 \leqslant \alpha_1 \leqslant \ldots \leqslant \beta_{n-1} \leqslant \alpha_{n-1} \leqslant b$, $L \gtrless 0$, *что для любого полинома* $P_{2n-2}(x)$ *степени* $\leqslant 2n-2$ *выполняется равенство*

$$\int_a^b P_{2n-2}(x)\, q(x)\, dx = L \sum_{i=1}^{n-1} \{P_{2n-2}(\alpha_i) - P_{2n-2}(\beta_i)\}.$$

Мы будем говорить далее, что *функция* $q(x)$ *допускает формулу квадратур Чебышева порядка* $2n-1$, *если имеет смысл также интеграл*

$$c_{2n-1} = \int_a^b x^{2n-1} q(x)\, dx$$

и если существуют такие числа $K \lessgtr 0$, $a \leqslant \begin{matrix} \alpha_1 \leqslant \alpha_2 \leqslant \ldots \leqslant \alpha_{n-1} \\ \beta_1 \leqslant \beta_2 \leqslant \ldots \leqslant \beta_{n-1} \end{matrix} \leqslant b$, *что для всякого полинома* $P_{2n-1}(x)$ *степени* $2n-1$ *выполняется соотношение* (1).

В этой работе мы займемся следующими вопросами:

А. Каковы необходимые и достаточные условия для того, чтобы $q(x)$ $(-\infty < x < \infty)$ для данного n, соответственно для всех n, допускала формулу квадратур Маркова; и если эти условия выполнены — как можно найти все формулы Маркова?

В. Как узнать, существует ли между формулами Маркова [если $q(x)$ допускает таковые] хотя бы одна формула Чебышева или нет, и как ее найти, если она существует?

Как указано в формулировке вопроса А, мы рассматриваем только функции $q(x)$, заданные в интервале $(-\infty, \infty)$; исследование поставленных

---

[3]) А. Марков, Новые приложения непрерывных дробей, Записки Академии наук по физико-математическому отделению, т. III, № 5, 1895; О предельных величинах интегралов в связи с интерполированием, там же, т. VI, № 5, 1898.

вопросов для конечного интервала несколько более сложно, однако может быть проведено с помощью аналогичных средств [4]).

Результаты настоящей работы были изложены нами без доказательства в одной заметке в Comptes Rendus [5]).

В дальнейшем мы будем опираться на нашу работу „Das Momentenproblem bei der zusätzlichen Bedingung von A. Markoff“ [6]); для краткости мы будем обозначать эту работу через M. P.

§ 2. Теорема 1. *Если форма*

$$\sum_{i,\,k=0}^{m} s_{i+k}x_i x_k \tag{7}$$

положительно определенная и s_{2n+1} *— любое вещественное число, то существуют неотрицательные функции* $f(x)$, *для которых*

$$s_k = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k f(x)\,dx \quad (k = 0, 1, 2, \ldots, 2m+1). \tag{8}$$

При этом величина

$$\inf\left\{ \operatorname*{vrai\,max}_{-\infty < x < \infty} f(x)\right\},$$

где $f(x)$ *пробегает все такие функции, будет равна наибольшему корню* λ_m *уравнения*

$$\Delta_m(L) = 0$$

[*см.* (5)], *в котором функции* $t_i(L)$ *определяются из разложения* (3) *при* $n = m+1$ *и*

$$c_i = is_{i-1} \quad (i = 1, 2, \ldots, 2m+1)$$

(*см.* M. P. § 2).

Доказательство. В силу формул (3_1) и (3_2) из M. P. имеем

$$\sum_{i,\,k=0}^{m} s_{i+k}x_i x_k = \lim_{L\to\infty} \sum_{i,\,k=0}^{m} Lt_{i+k}(L)\,x_i x_k.$$

Так как форма (7) предположена положительно определенной, то этим же свойством обладает и форма

$$\sum_{i,\,k=0}^{m} t_{i+k}(L)\,x_i x_k \tag{9}$$

для всех достаточно больших L.

Из теоремы I (M. P.) следует поэтому, что для достаточно больших L существуют функции $f(x)$, удовлетворяющие равенствам (8) и почти всюду — неравенству

$$0 \leqslant f(x) < L.$$

Эта же теорема I показывает, что форма (9) будет для $L = L_2 > L_1$ положительно определенная, если только она положительно определенная для $L = L_1$.

---

[4]) Эти вопросы мы разберем в особой работе.

[5]) C. R. Ac. Sci. Paris от 11/III 1935 г.

[6]) Записки Харківського математичного товариства, 4-я серия, т. XII (1936), стр. 13—33.

Но для

$$L < \frac{s_0^2}{2\sqrt{3}\sqrt{s_0 s_2 - s_1^2}}$$

определитель

$$\begin{vmatrix} t_0(L) & t_1(L) \\ t_1(L) & t_2(L) \end{vmatrix} = \frac{1}{L^2}\left\{ \begin{vmatrix} s_0 & s_1 \\ s_1 & s_2 \end{vmatrix} - \frac{s_0^4}{12L^2} \right\}$$

будет, очевидно, отрицателен, а следовательно, форма (9) не будет положительно определенной. Поэтому существует число $\lambda_m \geqslant \frac{s_0^2}{2\sqrt{3}\sqrt{s_0 s_2 - s_1^2}}$, обладающее тем свойством, что при $L > \lambda_m$ форма (9) положительно определенная, а при $L < \lambda_m$ — уже не положительно определенная. Это число λ_m является, очевидно, наибольшим положительным корнем уравнения [7])

$$L^{m+1}\,\Delta_m(L) = 0.$$

Если $L > \lambda_m$, то, как это следует из доказательства теоремы I (М. Р.), существует функция

$$f_L(x) = \frac{L}{2}\left\{1 - \operatorname{sgn}\frac{\psi_{m+1}(x)}{\varphi_{m+1}(x)}\right\},$$

принимающая только два значения 0 и L и удовлетворяющая условиям

$$s_k = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k f_L(x)\,dx \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, 2m+1).$$

С другой стороны, не существует функции $f(x)$, удовлетворяющей этим условиям, для которой почти всюду было бы выполнено условие

$$0 \leqslant f(x) < L < \lambda_m,$$

так как тогда форма

$$\sum_{i,k=0}^{m} t_{i+k}(L')\,x_i x_k$$

была бы для $L < L' < \lambda_m$ положительно определенной.

Замечание 1. Важно отметить, что λ_m зависит только от s_0, $s_1, \ldots, s_{2m}$, но не от s_{2m+1}, а также, что $\lambda_m \geqslant \lambda_{m-1}$.

Теорема 1 ничего не говорит о существовании или несуществовании такой функции $f(x)$, для которой $\operatorname{vrai\,max} f(x) = \lambda_m$. И действительно, оказывается, что такая функция может не существовать. Но небольшим изменением условий можно добиться того, чтобы такая функция всегда существовала. Именно, имеет место

Теорема 2. *Для существования неотрицательной функции $f(x)$, для которой*

$$(10) \qquad \begin{cases} s_k = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k f(x)\,dx \quad (k = 0, 1, 2, \ldots, 2m-1), \\ s_{2m} \geqslant \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2m} f(x)\,dx, \end{cases}$$

---

[7]) В М. Р. (§ 2) показано, что $L^{m+1}\Delta_m(L)$ есть четная функция.

необходимо и достаточно, чтобы форма (7) *была положительно определенной.*

Если это условие выполнено, то величина

$$\inf \{ \operatorname{vral} \max f(x) \},$$
$$-\infty < x < \infty$$

где $f(x)$ *пробегает все неотрицательные функции, удовлетворяющие соотношениям* (10), *совпадает с* λ_m. *Она достигается тогда и только тогда, когда* $f(x)$ *с точностью до множества меры нуль совпадает с функцией*

$$f_{\lambda_m}(x) = \frac{\lambda_m}{2}\left\{1 - \operatorname{sgn}\frac{(-1)^p \Delta_p(x; -\lambda_m)}{\Delta_p(x; \lambda_m)}\right\},$$

где p *— порядок последнего отличного от нуля определителя в ряде*

$$\Delta_0(\lambda_m), \quad \Delta_1(\lambda_m), \quad \ldots, \quad \Delta_{m-1}(\lambda_m).$$

Если при этом $p = m$, *то тогда также*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^{2m} f_{\lambda_m}(x)\, dx = s_{2m}.$$

Доказательство. Если неотрицательная функция $f(x)$ удовлетворяет условиям (10), то

$$0 < \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,(x_0 + x_1 t + \ldots + x_m t^m)^2\, dt \leqslant \sum_{i,k=0}^{m} s_{i+k}\, x_i x_k.$$

Если, обратно, форма (7) положительно определенная, то для всякого $L > \lambda_m$ согласно теореме 1 существует функция $f(x)$ $(0 \leqslant f(x) < L)$, удовлетворяющая условиям (8), а следовательно, и условиям (10).

Нам нужно поэтому исследовать только значения $L \leqslant \lambda_m$. Пусть сначала $L = \lambda_m$. Так как форма

$$\sum_{i,k=0}^{m} t_{i+k}(\lambda_m)\, x_i x_k, \tag{11}$$

очевидно, неотрицательна и является выродившейся, то согласно теореме B (M. P.) справедливы равенства

$$t_k(\lambda_m) = \sum_{i=1}^{p} \rho_i \alpha_i^k \quad (k = 0, 1, 2, \ldots, 2m-1),$$

$$t_{2m}(\lambda_m) = \sum_{i=1}^{p} \rho_i \alpha_i^{2m} + M,$$

где $p < m+1$ и $M \geqslant 0$ (при этом наверное $M = 0$, если $p = m$, так как в противном случае форма (11) была бы положительно определенной).

Из этих равенств следует, что

$$\frac{\psi_p(z)}{\varphi_p(z)} = \frac{(-1)^p \Delta_p(z; -\lambda_m)}{\Delta_p(z; \lambda_m)} = 1 + \sum_{i=1}^{p} \frac{\rho_i}{z - \alpha_i} =$$
$$= 1 + \frac{t_0(\lambda_m)}{z} + \frac{t_1(\lambda_m)}{z^2} + \ldots + \frac{t_{2m-1}(\lambda_m)}{z^{2m}} + \frac{t_{2m}(\lambda_m) - M}{z^{2m+1}} + \ldots$$

и, следовательно, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\lambda_m}{2}\left\{1 - \operatorname{sgn}\frac{\psi_p(x)}{\varphi_p(x)}\right\}\frac{dx}{z-x} = \frac{s_0}{z} + \frac{s_1}{z^2} + \ldots + \frac{s_{2m-1}}{z^{2m}} + \frac{\sigma_{2m}}{z^{2m+1}} + \ldots,$$

где

$$t_{2m}(\lambda_m) - M = \frac{\sigma_{2m}}{\lambda_m} + \frac{s_0 s_{2m-1}}{\lambda_m^2} + \ldots;$$

но, с другой стороны,

$$t_{2m}(\lambda_m) = \frac{s_{2m}}{\lambda_m} + \frac{s_0 s_{2m-1}}{\lambda_m^2} + \ldots,$$

так что

$$s_{2m} \geqslant \sigma_{2m}.$$

Этим доказано, что при $L = \lambda_m$ существует функция $f^*(x)$, для которой

$$\lambda_m \geqslant f^*(x) = \frac{\lambda_m}{2}\left\{1 - \operatorname{sgn}\frac{\psi_p(x)}{\varphi_p(x)}\right\} \geqslant 0$$

и

$$s_k = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k f^*(x)\,dx \quad (k = 0, 1, 2, \ldots, 2m-1),$$

$$s_{2m} \geqslant \sigma_{2m} = \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2m} f^*(x)\,dx,$$

причем в последней формуле знак равенства наверное достигается при $p = m$, т. е. при $\lambda_m > \lambda_{m-1}$.

Мы покажем теперь, что для всякой функции $f(x)$, удовлетворяющей нашим требованиям и отличающейся от $f^*(x)$ на множестве положительной меры, всегда

$$\operatorname*{vrai\,max}_{-\infty<x<+\infty} f(x) > \lambda_m.$$

Предположим, что почти всюду

$$0 \leqslant f(x) \leqslant L \leqslant \lambda_m.$$

Разность

$$f^*(x) - f(x)$$

имеет почти всюду знак полинома степени $2p$

$$-\psi_p(x)\,\varphi_p(x) = -(x-\alpha_1)\ldots(x-\alpha_p)(x-\beta_1)\ldots(x-\beta_p).$$

Поэтому

$$0 < -\int_{-\infty}^{+\infty} [f^*(x) - f(x)]\,\psi_p(x)\,\varphi_p(x)\,dx$$

или

$$\int_{-\infty}^{+\infty} [f^*(x) - f(x)]\,x^{2p}\,dx < 0. \tag{12}$$

Но в случае $p < m$ левая часть этого неравенства равна нулю, что невозможно. В случае же $p = m$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f^*(x)\,x^{2m}\,dx = s_{2m},$$

в то время как

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, x^{2m}\, dx \leqslant s_{2m},$$

так что левая часть неравенства (12) положительна или нуль, что также невозможно.

Из теоремы 2 и ее доказательства вытекает, что в рассматриваемой минимальной задаче нужно различать два случая: случай *полной* задачи, когда

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_{\min}(x)\, x^{2m}\, dx = s_{2m},$$

и случай *неполной* задачи, когда

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_{\min}(x)\, x^{2m}\, dx < s_{2m}.$$

Замечание 2. Легко видеть, что минимальная задача будет для $s_0, s_1, \ldots, s_{2m+2}$ во всяком случае полной, если она была полной для $s_0, s_1, \ldots, s_{2m}$. В самом деле, если для $s_0, s_1, \ldots, s_{2m+2}$ задача неполная, то $\lambda_{m+1} = \lambda_m$ и существует функция $f(x)$, для которой

$$0 \leqslant f(x) \leqslant \lambda_{m+1}$$

и

$$s_k = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k f(x)\, dx \quad (k = 0, 1, 2, \ldots, 2m+1),$$

$$s_{2m+2} > \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2m+2} f(x)\, dx.$$

Эта функция удовлетворяет поэтому a fortiori условиям

$$s_k = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k f(x)\, dx \quad (k = 0, 1, 2, \ldots, 2m)$$

и неравенству

$$0 \leqslant f(x) \leqslant \lambda_m,$$

так что задача для $s_0, s_1, \ldots, s_{2m}$ не может быть неполной.

Теорема 3. *Если форма*

$$\sum_{i,k=0}^{m-1} s_{i+k}\, x_i x_k$$

положительно определенная и s_{2m-1} — произвольно выбранное вещественное число, то существуют два таких числа

$$u_{2m} = u(s_0, s_1, \ldots, s_{2m-1}), \quad v_{2m} = v(s_0, s_1, \ldots, s_{2m-1}) \quad (v_{2m} \leqslant \infty),$$

что в рассматриваемой минимальной задаче для

$$u_{2m} < s_{2m} \leqslant v_{2m}$$

будет иметь место случай полноты, а для

$$s_{2m} > v_{2m}$$

— случай неполноты, причем u_{2m} определяется из уравнения

$$\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \dots & s_m \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{m-1} & s_m & \dots & s_{2m-1} \\ s_m & s_{m+1} & \dots & u_{2m} \end{vmatrix} = 0,$$

так что для значений $s_{2m} \leqslant u_{2m}$ минимальная задача вообще не имеет смысла. При $u_{2m} < s_{2m} \leqslant v_{2m}$ величина $\lambda_m = \lambda(s_{2m})$ будет убывающей функцией, в то время как для $s_{2m} \geqslant v_{2m}$ $\lambda_m = \lambda(s_{2m}) = \lambda_{m-1} = \text{const}$.

Доказательство. Если для $s_{2m} = s'_{2m}$ имеет место случай неполноты, то, очевидно, $\lambda(s'_{2m}) = \lambda_{m-1}$. Но отсюда следует, что при $s_{2m} > s'_{2m}$ будет также $\lambda(s_{2m}) = \lambda_{m-1}$, так как, с одной стороны, очевидно,

$$\lambda(s_{2m}) \leqslant \lambda(s'_{2m}) \quad (s_{2m} > s'_{2m}),$$

а с другой стороны, всегда $\lambda_m \geqslant \lambda_{m-1}$.

Числа s_{2m}, для которых имеет место случай неполноты, имеют поэтому нижнюю границу $v_{2m} \geqslant u_{2m}$, причем не исключается и случай $v_{2m} = \infty$.

Но легко видеть, что v_{2m} должно быть больше, чем u_{2m}. Достаточно, в самом деле, взять какое-либо число $L > \lambda_{m-1}$ и определить $s_{2m} = s^*_{2m}$ из уравнения $\Delta_m(L) = 0$; тогда $\lambda(s^*_{2m}) \geqslant L$, и мы будем иметь случай полноты, так что $s^*_{2m} \leqslant v_{2m}$ и, с другой стороны, $s^*_{2m} > u_{2m}$.

Пусть теперь

$$u_{2m} < s'_{2m} < s''_{2m} \leqslant v_{2m}.$$

Нам нужно показать, что $\lambda(s'_{2m}) > \lambda(s''_{2m})$; а так как, очевидно, $\lambda(s'_{2m}) \geqslant \geqslant \lambda(s''_{2m})$, то достаточно показать, что равенство $\lambda(s'_{2m}) = \lambda(s''_{2m})$ не имеет места.

Но из $\lambda(s'_{2m}) = \lambda(s''_{2m})$ следует, что

$$\lambda(s'_{2m}) = \lambda(s^*_{2m})$$

для каждого s^*_{2m}, удовлетворяющего неравенству

$$s'_{2m} < s^*_{2m} < s''_{2m}.$$

Если поэтому $f(x)$ есть решение минимальной задачи для $s_{2m} = s'_{2m}$, то эта функция дает решение, и притом неполное, для $s_{2m} = s^*_{2m}$, что невозможно, так как при $s_{2m} < v_{2m}$ решение не может быть неполным.

Остается только указать, как находить v_{2m}.

Разрешая относительно s_{2m} равенство (3_2) (М. Р.):

$$t_{2m}(L) = \frac{s_{2m}}{L} + \frac{s_0 s_{2m-1}}{L^2} + \dots = \frac{s_{2m}}{L} + \Phi(L, s_0, \dots, s_{2m-1}),$$

и принимая во внимание, что для $s_{2m} = v_{2m}$ имеет место равенство $L = \lambda_m = \lambda_{m-1}$, мы без труда представим величину v_{2m} в виде

$$v_{2m} = -\lambda_{m-1}\Phi(\lambda_{m-1}; s_0, \dots, s_{2m-1}) - \tag{13}$$

$$-\lambda_{m-1} \lim_{L \to \lambda_{m-1}} \frac{\begin{vmatrix} t_0(L) & t_1(L) & \dots & t_m(L) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ t_m(L) & t_{m+1}(L) & \dots & 0 \end{vmatrix}}{\Delta_{m-1}(L)}.$$

Чтобы получить простой пример, положим

$$s_0 = 1, \quad s_1 = 0, \quad s_2 = 1.$$

Согласно формулам (3_1), (3_2) (М. Р.) мы найдем, что

$$t_0(L) = \frac{1}{L}, \quad t_1(L) = \frac{1}{2L^2}, \quad t_2(L) = \frac{1}{L} + \frac{1}{6L^3},$$

$$t_3(L) = \frac{s_3}{L} + \frac{1}{L^2} + \frac{1}{24L^4}, \quad t_4(L) = \frac{s_4}{L} + \frac{s_3}{L^2} + \frac{1}{2L^3} + \frac{1}{120L^5}.$$

Поэтому

$$\Delta_1(L) = \begin{vmatrix} t_0(L) & t_1(L) \\ t_1(L) & t_2(L) \end{vmatrix} = \frac{1}{L^2}\left(1 - \frac{1}{12L^2}\right),$$

так что

$$\lambda_1 = \frac{1}{2\sqrt{3}}.$$

По формуле (13) находим, следовательно,

$$v_4 = \frac{9}{5} + \lim_{L \to 1/(2\sqrt{3})} \frac{s_3^2}{1 - 1/(12L^2)},$$

т. е. v_4 конечно только при $s_3 = 0$ и равно тогда $\frac{9}{5}$. С другой стороны, $u_4 = 1 + s_3^2$.

Можно без труда построить последовательность

$$s_0, \quad s_1, \quad \ldots, \quad s_n, \quad \ldots,$$

обладающую тем свойством, что минимальная задача для $s_0, s_1, \ldots, s_{2m}$ будет полная при $m = 2k - 1$ и неполная при $m = 2k$ $(k = 1, 2, \ldots)$. Действительно, если $s_0, s_1, \ldots, s_m$ $(m = 2k)$ уже найдены, то согласно замечанию 2 достаточно лишь выбрать числа s_{2m+1}, s_{2m+2} так, чтобы выполнялось неравенство

$$\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \ldots & s_{m+1} \\ s_1 & s_2 & \ldots & s_{m+2} \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots \\ s_{m+1} & s_{m+2} & \ldots & s_{2m+2} \end{vmatrix} > 0,$$

и тогда минимальная задача будет полной для

$$s_0, \quad s_1, \quad \ldots, \quad s_{2m+2}.$$

Поэтому существует функция $f(x)$, для которой

$$0 \leqslant f(x) \leqslant \lambda_{m+1}$$

и

$$s_k = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k f(x)\, dx \quad (k = 0, 1, 2, \ldots, 2m+2).$$

Если положить теперь

$$s_{2m+3} = \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2m+3} f(x)\, dx$$

и взять в качестве s_{2m+4} произвольное число, удовлетворяющее условию

$$s_{2m+4} > \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2m+4} f(x)\, dx,$$

то минимальная задача для

$$s_0, \quad s_1, \quad \ldots, \quad s_{2m+4}$$

будет неполной.

Наше утверждение получается, следовательно, по индукции, если, например, положить $s_0 = 1$, $s_1 = 0$, $s_2 = 1$.

§ 3. Теорема 4. *Для того чтобы функция* $q(x)$ $(-\infty < x < +\infty)$, *для которой интегралы*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^{k+1} q(x)\, dx = c_{k+1} = (k+1)\, s_k \quad (k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ 2n-1)$$

имеют смысл и

$$\int_{-\infty}^{+\infty} q(x)\, dx = 0, \tag{14}$$

допускала формулу квадратур Маркова порядка $2n$, *необходимо и достаточно, чтобы форма*

$$\sum_{i,\,k=0}^{n-1} s_{i+k}\, x_i x_k$$

была положительно или отрицательно определенной.

Доказательство. В самом деле, если для каждого $P_{2n}(x)$ имеет место равенство

$$\int_{-\infty}^{+\infty} P_{2n}(x)\, q(x)\, dx = L \sum_{i=1}^{n} \{P_{2n}(\alpha_i) - P_{2n}(\beta_i)\} \quad (\beta_1 \leqslant \alpha_1 \leqslant \ldots \leqslant \beta_n \leqslant \alpha_n),$$

то в частности

$$c_{k+1} = L \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i^{k+1} - \beta_i^{k+1}) \quad (k = 0, 1, 2, \ldots, 2n-1), \tag{15}$$

и построив функцию

$$f_L(x) = \frac{L}{2} \left\{ 1 - \operatorname{sgn} \frac{\psi(x)}{\varphi(x)} \right\}$$

с

$$\psi(x) = (x - \beta_1) \ldots (x - \beta_n), \quad \varphi(x) = (x - \alpha_1) \ldots (x - \alpha_n),$$

мы сможем, очевидно, представить равенство (15) в виде

$$c_{k+1} = \int_{-\infty}^{+\infty} (k+1)\, x^k f_L(x)\, dx \quad (k = 0, 1, 2, \ldots,\ 2n-1),$$

так что

$$s_k = \int_{-\infty}^{+\infty} t^k f_L(t)\, dt \quad (k = 0, 1, 2, \ldots,\ 2n-1) \tag{16}$$

и, следовательно,

$$\sum_{i,\,k=0}^{n-1} s_{i+k}\, x_i x_k = \int_{-\infty}^{+\infty} (x_0 + x_1 t + \ldots + x_{n-1} t^{n-1})^2 f_L(t)\, dt.$$

Отсюда следует, что форма, стоящая в левой части равенства, положительно (соответственно отрицательно) определенная, если $L>0$ (соответственно $L<0$), чем и доказана необходимость условия. Чтобы доказать достаточность, мы можем, не ограничивая общности, допустить, что $L>0$, так как в противном случае вместо $q(x)$ достаточно было бы положить в основу наших рассуждений функцию $-q(x)$.

Формулы (16) показывают, что каждая формула квадратур Маркова порядка $2n$ приводит к проблеме моментов

$$s_k=\int_{-\infty}^{+\infty} x^k f(x)\,dx \quad (k=0, 1, 2, \ldots, 2n-1)$$

с $f(x)\geqslant 0$. А так как форма

$$\sum_{i,\,k=0}^{n-1} s_{i+k}x_i x_k$$

согласно предположению положительно определенная, то эта задача согласно теореме 1 имеет для каждого $L>\lambda_{n-1}$ решение, удовлетворяющее неравенствам $0\leqslant f(x)\leqslant L$, причем для каждого $L>\lambda_{n-1}$ всегда существует решение, принимающее только значения 0 и L и имеющее вид

$$f_L(x)=\frac{L}{2}\left\{1-\operatorname{sgn}\frac{\psi(x)}{\varphi(x)}\right\}.$$

Но это решение приводит к следующим формулам:

$$s_k=\int_{-\infty}^{+\infty} x^k f_L(x)\,dx=\frac{L}{k+1}\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i^{k+1}-\beta_i^{k+1}),$$

откуда вытекают как равенства (15), так тем самым и существование формулы квадратур Маркова. Тем самым теорема доказана, и, кроме того, мы видим, что при $L<\lambda_{n-1}$ существует бесконечно много формул квадратур Маркова, которые все могут быть получены описанным способом.

Теорема 5. *Пусть $q(x)$ — какая-либо функция, удовлетворяющая условию* (14), *для которой имеют смысл интегралы*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^{k+1}q(x)\,dx=c_{k+1}=(k+1)s_k \quad (k=0, 1, 2, \ldots, 2n-2),$$

и пусть форма $\sum_{i,\,k=0}^{n-1} s_{i+k}x_i x_k$ *положительно определенная.*

А. *Если тогда минимальная задача* § 2 *является для* $s_0, s_1, \ldots, s_{2n-2}$ *полной* (*например*, $\lambda_{n-1}>\lambda_{n-2}$), *то $q(x)$ наверное допускает формулу квадратур Чебышева порядка* $2n-1$ (*с* $K=\lambda_{n-1}$ *и* $2p$ *различными узлами* α_i, β_i, *если* $\lambda_{n-1}=\lambda_{n-2}=\ldots=\lambda_p>\lambda_{p-1}$).

В. *Если, наоборот, указанная минимальная задача неполная, то $q(x)$ допускает формулу квадратур Чебышева порядка* $2n-3$ (*с* $K=\lambda_{n-1}$ *и* $2p\leqslant 2n-4$ *узлами*), *которая, однако, остается пригодной и для полиномов степени* $2n-2$.

Доказательство. Доказательство протекает точно так же, как и доказательство достаточности в теореме 4, если только принять во внимание соответствующие теоремы из § 2.

Мы можем поэтому проведение этого доказательства предоставить читателю; мы заметим только, что формулы квадратур Чебышева, о которых идет речь в теореме 5, одновременно являются формулами Маркова, т. е. что

$$\beta_1 \leqslant \alpha_1 \leqslant \beta_2 \leqslant \alpha_2 \leqslant \ldots$$

Возникает еще вопрос, могут ли рассматриваемые здесь формулы Чебышева быть получены по методу Чебышева, т. е. прежде всего можно ли найти $K = \lambda_{n-1}$ из уравнения (4)?

У нас $K = \lambda_{n-1}$ есть наибольший корень уравнения $\Delta_{n-1}(L) = 0$, а это уравнение не совпадает с уравнением Чебышева (4).

Но если $\lambda_{n-1} > \lambda_{n-2}$, то тогда наверное $\Delta_{n-2}(\lambda_{n-1}) \neq 0$, а в этом случае λ_{n-1} является также и наибольшим корнем уравнения Чебышева (4).

Это уже не обязательно будет иметь место при $\lambda_{n-1} = \lambda_{n-2}$; но нужно заметить, что число узлов претерпевает тогда большее уменьшение, чем степень полиномов, для которых будет верна формула квадратур, так что мы в этом случае получим не чебышевскую, а, так сказать, „сверхчебышевскую“ формулу квадратур.

Мы можем поэтому сказать, что если рассматриваемые в теореме 5 формулы являются строго чебышевскими, а не „сверхчебышевскими“, то они могут быть получены по способу Чебышева, если взять в качестве K наибольший корень чебышевского уравнения.

Замечание 3. Функция $q(x)$ должна, кроме условия (14), удовлетворять еще тому условию, что произведение $q(x)\,x^{2n}$ абсолютно интегрируемо по интервалу $(-\infty, +\infty)$ и функция

$$p(x) = \int_{-\infty}^{x} q(t)\,dt$$

во всем интервале $(-\infty, +\infty)$ имеет один и тот же знак. Мы покажем, что тогда условия теоремы 4 будут наверное выполнены.

В самом деле, в этом случае

$$s_j = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{j+1}\, x^{j+1} q(x)\,dx = \frac{1}{j+1} \int_{-\infty}^{+\infty} x^{j+1}\,dp(x)$$

и, следовательно,

$$s_j = \lim_{N\to\infty} \left\{ -\int_{-N}^{N} x^{-j} p(x)\,dx + \frac{x^{j+1}}{j+1} p(x) \Big|_{-N}^{N} \right\}.$$

Так как, с другой стороны,

$$N^{j+1} p(N) = N^{j+1} \int_{-\infty}^{N} q(x)\,dx = -N^{j+1} \int_{N}^{\infty} q(x)\,dx,$$

то справедливо соотношение

$$|N^{j+1} p(N)| \leqslant \int_{N}^{\infty} x^{j+1} |q(x)|\,dx \leqslant \int_{N}^{\infty} x^{2n} |q(x)|\,dx \longrightarrow 0 \quad (N \longrightarrow \infty),$$

и подобным же образом

$$N^{j+1} p(-N) \longrightarrow 0.$$

Мы можем поэтому сказать, что

$$s_j = -\int_{-\infty}^{+\infty} x^j p(x)\, dx,$$

а это указывает на то, что форма

$$\sum_{i,\,k=0}^{n-1} s_{i+k}\xi_i\xi_k = -\int_{-\infty}^{+\infty} (\xi_0 + \xi_1 x + \ldots + \xi_{n-1}x^{n-1})^2 p(x)\, dx$$

положительно или отрицательно определенная.

Это замечание показывает, что обе функции

$$q_1(x) = \begin{cases} x & (|x| \leqslant 1) \\ 0 & (|x| > 1), \end{cases}$$

$$q_2(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} & (|x| < 1) \\ 0 & (|x| \geqslant 1), \end{cases}$$

на которых Чебышев иллюстрировал свой способ, удовлетворяют условиям теоремы 4.

В самом деле, для $-1 \leqslant x \leqslant 1$

$$p_1(x) = \int_{-1}^{x} q_1(t)\, dt = \frac{x^2-1}{2} \leqslant 0,$$

$$p_2(x) = \int_{-1}^{x} q_2(t)\, dt = -\sqrt{1-x^2} \leqslant 0,$$

тогда как для $|x| > 1$

$$p_1(x) = p_2(x) = 0.$$

ZUM PICARDSCHEN SATZ.

Von

Harald Bohr in Kopenhagen.

Zu den wichtigsten Errungenschaften der neueren Theorie der analytischen Funktionen gehören die beiden folgenden Sätze von Picard:

1. Picardscher Satz. *Jede ganze transzendente Funktion nimmt sämtliche Werte mit höchstens einer einzigen Ausnahme an.*

2. Picardscher Satz. *In der Umgebung einer isolierten wesentlich singulären Stelle nimmt eine analytische Funktion sämtliche Werte mit höchstens einer einzigen Ausnahme an.*

Ausführlicher und für das folgende bequemer formuliert lässt sich der 2. Satz auch folgendermassen aussprechen, wobei wir uns die betrachtete singuläre Stelle im Punkte $z = \infty$ denken:

Es sei die Funktion $f(z)$ in der Umgebung $R < |z| < \infty$ des Punktes $z = \infty$ eindeutig, regulär und verschieden von a und b (wobei die Zahlen a und b natürlich von einander verschieden sind). Dann ist die Funktion $f(z)$ im Punkte $z = \infty$ regulär oder besitzt dort einen Pol, oder, um die beiden Fälle zusammenzufassen, es gibt eine positive ganze Zahl N_0, so dass $f(z)\, z^{-N_0}$ im Punkte $z = \infty$ regulär ist; oder, was auf dasselbe hinausläuft: es gibt eine positive ganze Zahl N, so dass bei dem Grenzübergange $z \to \infty$ eine Ungleichung der Form

$$|f(z)| < |z|^N$$

stattfindet.

Die Picardschen Beweise dieser beiden Sätze wurden bekanntlich durch Heranziehung der Modulfunktion geführt. Während der Beweis des 1. Satzes äusserst einfach verlief, forderte der Beweis des zweiten, den ersten umfassenden Satzes kompliziertere Ueberlegungen. Es war daher in methodischer Hinsicht ein wesentlicher Fortschritt, als es Lindelöf durch eine sinnreiche Ueberlegung zu zeigen gelang, dass dieser 2. Picardsche Satz fast unmittelbar aus einem bekannten Schottkyschen Satze abgeleitet werden kann — welcher seinerseits in naher Beziehung zu der berühmten Landauschen Verallgemeinerung des 1. Picardschen Satzes steht und wie dieser sehr einfach mittels der Modulfunktion bewiesen werden kann. Dieser Satz lautet:

Schottkyscher Satz. *Es sei $f(z)$ im Einheitskreise $|z| < 1$ regulär und verschieden von a und b, und ϑ eine positive Zahl zwischen 0 und 1. Dann gibt es eine nur von den vier Zahlen $f(0)$, a, b und ϑ abhängige positive Konstante Ω derart, dass*

$$|f(z)| < \Omega \quad \text{für} \quad |z| \leqq \vartheta.$$

Bei der Lindelöfschen Verwendung dieses Satzes zum Beweis des 2. Picardschen Satzes war übrigens eine völlig triviale Abschätzung der Konstanten Ω nötig, nämlich dass Ω unabhängig von der Grösse $f(0)$ gewählt werden kann, falls $f(0)$ in „sicherer Entfernung" von a, b und ∞ bleibt.

In der Abhandlung „Zur Theorie der fastperiodischen Funktionen III" (Acta Mathematica, Bd. 47), in welcher die Theorie der analytischen fastperiodischen Funktionen einer komplexen Veränderlichen $s = \sigma + it$ entwickelt wurde, zeigte der Verfasser, dass der 2. Picardsche Satz auf fastperiodische Singularitäten verallgemeinert werden kann. Hierzu mussten aber ziemlich weitgehende, von Iversen geschaffene Hilfsmittel aus der Theorie der allgemeinen analytischen Funktionen herangezogen werden, weil die oben erwähnte Lindelöfsche Methode nicht auf den fastperiodischen Fall übertragen werden konnte.

Neuerdings hat aber der Verfasser eine Variante des Lindelöfschen Beweises gefunden, die — im Gegensatz zu dem ursprünglichen Lindelöfschen Beweise — nicht nur auf fastperiodische Funktionen angewendet werden kann, sondern zugleich eine Verallgemeinerung des 2. Picardschen Satzes mehr prinzipieller Art liefert. Diese Verallgemeinerung darzustellen, ist das Ziel der vorliegenden kleinen Abhandlung; ihre Beziehung zur Theorie der fastperiodischen Funktionen werde ich an anderer Stelle erörtern.

Für die neue Formulierung des Lindelöfschen Beweises des 2. Picardschen Satzes — oder vielmehr der erwähnten Verallgemeinerung des letzteren — reicht allerdings der Schottkysche Satz in der obigen Formulierung nicht aus, sondern es muss eine recht genaue Abschätzung der darin vorkommenden Konstanten $\Omega = \Omega(a, b, f(0), \vartheta)$ herangezogen werden. Eine solche Abschätzung ist aber schon bekannt und übrigens ebenfalls mit Hilfe der Modulfunktionen sehr leicht abzuleiten. In einer gemeinsamen Arbeit von Landau und dem Verfasser „Ueber das Verhalten von $\zeta(s)$ und $\zeta_\chi(s)$ in der Nähe der Geraden $\sigma = 1$" (Göttinger Nachrichten 1910) findet sich nämlich in § 6 (welcher Paragraph an frühere Untersuchungen von Landau über den Picardschen Satz anknüpft und, wie in der Einleitung erwähnt, von ihm allein herrührt), der folgende Satz:

Schottky-Landauscher Satz. *Es seien a und b zwei unter einander verschiedene komplexe Zahlen. Dann gibt es eine Konstante D, die nur von a und b abhängt, mit der folgenden Eigenschaft: für jede m Einheitskreise $|z| < 1$ reguläre und von a und b verschiedene Funktion $f(z)$ gilt in dem kleineren Kreise $|z| \leqq \vartheta$ $(0 < \vartheta < 1)$ die Abschätzung*

$$|f(z)| < e^{\frac{D \ln(|f(0)|+2)}{1-\vartheta}}. \tag{1}$$

Bei der Anwendung dieser Ungleichung (1) auf die ζ-Funktion in der oben zitierten Arbeit war die Art der Abhängigkeit der rechten Seite von der Grösse $f(0)$ von besonderer Bedeutung, während die Art der Abhängigkeit von ϑ für unseren damaligen Zweck unwesentlich war, weil bei der Anwendung von (1) ein fester Wert von ϑ $\left(\text{z. B. } \vartheta = \frac{1}{2}\right)$ zugrunde gelegt wurde. Für den jetzigen Zweck (den Beweis der Verallgemeinerung des 2. Picardschen Satzes) liegt die Sache gerade umgekehrt, d. h. es ist die Art ausschlaggebend, in welcher die Grösse ϑ in der rechten Seite von (1)

auftritt, während die Abhängigkeit von $f(0)$ nur grob ausgenutzt wird. Wir betonen dies, indem wir das folgende Corollar des Schottky-Landauschen Satzes, welches gerade soviel von diesem Satze enthält, wie wir für das folgende gebrauchen, explicite als ein Lemma formulieren:

Lemma. *Es seien a und b zwei unter einander verschiedene komplexe Zahlen und k eine positive Grösse. Dann gibt es eine positive Konstante $K = K(a, b, k)$ derart, dass jede im Kreise $|z| < 1$ reguläre und von a und b verschiedene sowie die Ungleichung $|f(0)| < k$ befriedigende Funktion $f(z)$ im ganzen Kreise $|z| \leqq \vartheta$ $(0 < \vartheta < 1)$ der Ungleichung*

$$|f(z)| < e^{\frac{K}{1-\vartheta}} \tag{2}$$

genügt.

Aus diesem Lemma leiten wir zunächst mittels einer einfachen konformen Abbildung den folgenden Satz ab, welcher insofern als der Hauptsatz dieser kleinen Abhandlung betrachtet werden kann, als sich aus ihm die erwähnte Verallgemeinerung des 2. Picardschen Satzes in wenigen Worten ergeben wird:

Satz. *Es sei $F(s) = F(\sigma + it)$ eine in der Halbebene $\sigma > 0$ reguläre und von a und b verschiedene Funktion, welche auf der ganzen Geraden $\sigma = 1$ dem Betrage nach kleiner als k ist. Dann gilt in der ganzen Halbebene $\sigma > 1$ die Ungleichung*

$$|F(s)| < e^{K\sigma}, \tag{3}$$

wo K eine nur von a, b, k abhängige positive Konstante bezeichnet, als welche übrigens jede im Sinne des vorhergehenden Lemmas verwendbare Konstante K benutzt werden kann.

Bemerkung. Uebrigens gilt im Streifen $0 < \sigma < 1$ die Ungleichung $|f(s)| < e^{K/\sigma}$. Diese Ungleichung ist völlig analog der für $\sigma > 1$ gültigen Ungleichung (3) abzuleiten, wird aber für unseren vorliegenden Zweck nicht benötigt.

Beweis. Es genügt natürlich zu zeigen, dass für jede für $\sigma > 0$ reguläre und von a und b verschiedene Funktion $G(s)$, welche im Punkte $s = 1$ der Ungleichung $|G(1)| < k$ genügt, in jedem Punkte $s = \sigma$ der reellen Strecke $1 < \sigma < \infty$ die Ungleichung

$$|G(\sigma)| < e^{K\sigma} \tag{4}$$

gilt; denn die gewünschte Ungleichung (3) des Satzes, d. h. die Ungleichung

$$|F(\sigma + it_0)| < e^{K\sigma}$$

für einen beliebigen festen Punkt $\sigma + it_0$ der Halbebene $\sigma > 1$ folgt ja sofort aus dieser Ungleichung (4), wenn sie auf die Funktion $G(s) = F(s + it_0)$ angewendet wird.

Um die Ungleichung (4) darzutun, bilden wir die Halbebene $\sigma > 0$ der s-Ebene auf den Einheitskreis $|z| < 1$ der z-Ebene konform ab und zwar so, dass der Punkt $s = 1$ dem Punkte $z = 0$ und der Randpunkt $s = \infty$ dem Randpunkte $z = 1$ entspricht, d. h. wir setzen

$$z = \frac{s-1}{s+1}, \quad s = \frac{z+1}{1-z}.$$

Hierdurch geht $G(s)$ in die für $|z|<1$ reguläre und von a und b verschiedene Funktion

$$f(z)=G\left(\frac{z+1}{1-z}\right)$$

über, für welche $f(0)=G(1)$, also $|f(0)|<k$ ist. Dem reellen Punkte $s=\sigma>1$ entspricht bei dieser Abbildung der Punkt $z=\vartheta=\frac{\sigma-1}{\sigma+1}$ der Strecke $0<z<1$. Wegen

$$1-\vartheta=1-\frac{\sigma-1}{\sigma+1}=\frac{2}{\sigma+1}>\frac{2}{2\sigma}=\frac{1}{\sigma}$$

folgt aus dem obigen Lemma — indem dieses speziell auf den positiven Randpunkt $z=\vartheta$ des Kreises $|z|\leqq\vartheta$ angewendet wird — die Ungleichung

$$|G(\sigma)|=|f(\vartheta)|<e^{\frac{K}{1/\sigma}}=e^{K\sigma},$$

womit der Satz bewiesen ist.

Nunmehr formuliere ich die genannte

Verallgemeinerung des 2. Picardschen Satzes. *Es sei S die Riemannsche Fläche des Logarithmus, d. h. die unendlichblättrige Fläche der Veränderlichen $z=re^{iv}$; $0<r<\infty$, $-\infty<v<\infty$. In einer unendlichblättrigen Umgebung $R<|z|<\infty$ des Windungspunktes $z=\infty$ sei die Funktion $f(z)$ regulär und verschieden von a und b. Ferner gebe es ein $\rho>R$, so dass $f(z)$ auf der (unendlich oft durchlaufenen) Kreislinie $r=\rho$, $-\infty<v<\infty$ beschränkt bleibt, etwa*

$$|f(z)|<k.$$

Dann gilt gleichmässig in allen Blättern bei dem Grenzübergang $z\longrightarrow\infty$ eine Ungleichung der Form

$$|f(z)|<|z|^K,$$

wo K eine von R, ρ, a, b und k abhängige Konstante ist.

Bemerkung. Es ist klar, dass hierin der 2. Picardsche Satz enthalten ist, nämlich dem speziellen Falle entsprechend, wo $f(z)$ in der schlichten Umgebung $R<|z|<\infty$ des Punktes $z=\infty$ regulär ist, oder vielmehr, wo $f(z)$, auf der Riemannschen Fläche S betrachtet, periodisch mit der Periode 2π in Bezug auf die Amplitude v ist. Denn in diesem Falle ist ja von selbst bei jedem $\rho>R$ die Funktion $f(z)$ für $|z|=\rho$ beschränkt.

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit darf offenbar beim Beweise $R=1$, $\rho=e$ angenommen werden; sonst ersetze man nur z durch $Rz^{\ln\frac{e}{R}}$. Wir setzen $z=e^s$ und betrachten die Funktion

$$F(s)=f(e^s),$$

welche in der Halbebene $\sigma>0$ regulär und verschieden von a und b ist und auf der ganzen Geraden $\sigma=1$ (welche dem unendlich oft durchlaufenen Kreise $|z|=e$ entspricht) der Ungleichung

$$|F(s)|<k$$

genügt. Dann gilt nach dem obigen Satze in der ganzen Halbebene $\sigma > 1$ eine Ungleichung der Form

$$|F(s)| < e^{K\sigma},$$

d. h., wenn wir zur z-Ebene zurückkehren: es gilt im unendlichblättrigen Gebiete $|z| > e$ die Ungleichung

$$|f(z)| < |z|^K,$$

womit der Satz bewiesen ist.

О ПРИБЛИЖЕННОМ ВЫРАЖЕНИИ e^x ЧЕРЕЗ АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ.

В. П. Вельмин (Ростов-на-Дону).

§ 1. Будем рассматривать полином

$$\Phi(x, y) = \varphi_0 y^m + \varphi_1 y^{m-1} + \ldots + \varphi_k y^{m-k} + \ldots + \varphi_m, \tag{1}$$

обладающий такими свойствами:

1) коэфициенты $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_m$ являются полиномами от x, степени которых соответственно не превосходят чисел $n_0, n_1, \ldots, n_m$;

2) в степенном разложении функции $\Phi(x, e^x)$ по возрастающим степеням x показатель начального члена имеет наибольшее возможное значение, допускаемое системой чисел $m, n_0, n_1, \ldots, n_m$.

Для краткости мы будем говорить, что подобный полином $\Phi(x, y)$ имеет максимальный порядок по отношению к заданной системе степеней $m, n_0, n_1, \ldots, n_m$.

Существование полиномов максимального порядка для любой системы степеней является очевидным следствием трансцендентности функции e^x.

§ 2. Так как общий полином степени n_k от x имеет в своем составе $n_k + 1$ параметров, то в составе полинома $\Phi(x, y)$, удовлетворяющего одному первому свойству § 1, должно быть $m + n_0 + n_1 + \ldots + n_m + 1$ произвольных параметров. Поэтому параметры всегда могут быть выбраны так, чтобы удовлетворялись какие-нибудь $m + n_0 + n_1 + \ldots + n_m$ однородных уравнений; в частности, можно обратить в нуль соответствующее число коэфициентов начальных членов разложения $\Phi(x, e^x)$. При таком выборе параметров разложение $\Phi(x, e^x)$ начинается с члена, содержащего $x^{m+n_0+n_1+\ldots+n_m}$ или более высокую степень x.

Тем самым мы можем высказать следующую теорему:

Если полином $\Phi(x, y)$ имеет максимальный порядок относительно системы степеней $m, n_0, n_1, \ldots, n_m$ и разложение $\Phi(x, e^x)$ начинается с члена Ax^σ, то должно иметь место соотношение

$$\sigma \geqslant m + n_0 + n_1 + \ldots + n_m. \tag{2}$$

§ 3. Нетрудно убедиться теперь в справедливости следующей теоремы:

Система степеней $m, n_0, n_1, \ldots, n_m$ определяет соответствующий ей полином максимального порядка с точностью до постоянного множителя.

В самом деле, допустим, что полиномы

$$\Phi(x, y) = \sum \varphi_k y^{m-k}, \quad \Psi(x, y) = \sum \psi_k y^{m-k}$$

оба имеют максимальный порядок относительно системы $m,\ n_0,\ n_1, \ldots,\ n_m$. Мы можем написать разложения

$$\Phi(x, e^x) = A_\sigma x^\sigma + A_{\sigma+1} x^{\sigma+1} + \ldots,$$
$$\Psi(x, e^x) = B_\sigma x^\sigma + B_{\sigma+1} x^{\sigma+1} + \ldots,$$

ричем коэфициенты A_σ и B_σ обязательно отличны от нуля. Рассмотрим полином

$$\Theta(x, y) = B_\sigma \Phi(x, y) - A_\sigma \Psi(x, y) = \sum \theta_k y^{m-k}.$$

Равенство $\theta_k = B_\sigma \varphi_k - A_\sigma \psi_k$ показывает, что степень θ_k не превосходит числа n_k. Но из разложений функций $\Phi(x, e^x)$, $\Psi(x, e^x)$ вытекает, что

$$\Theta(x, e^x) = (B_\sigma A_{\sigma+1} - A_\sigma B_{\sigma+1}) x^{\sigma+1} + \ldots$$

Полученное равенство совместимо с максимальным свойством полиномов $\Phi(x, y)$ и $\Psi(x, y)$ только в том случае, если полином $\Theta(x, e^x)$ тождественно равен нулю. На основании трансцендентности функции e^x отсюда следует, что полином $\Theta(x, y)$ также тождественно равен нулю, т. е.

$$B_\sigma \Phi(x, y) = A_\sigma \Psi(x, y),$$

что и требовалось доказать.

§ 4. Предполагая, что полином (1) имеет максимальный порядок относительно системы степеней $m,\ n_0,\ n_1, \ldots,\ n_m$, напишем равенство

$$\Phi(x, e^x) = \sum_{k=0}^{m-1} \varphi_k(x)\, e^{(m-k)x} + \varphi_m(x) = A_\sigma x^\sigma + \ldots \tag{3}$$

Так как степень полинома $\varphi_m(x)$ не превосходит n_m, то диференцируя равенство (3) $n_m + 1$ раз, мы получим соотношение

$$\sum_{k=0}^{m-1} \frac{d^{n_m+1}}{dx^{n_m+1}} \left\{ \varphi_k(x)\, e^{(m-k)x} \right\} = \sigma(\sigma-1)\ldots(\sigma-n_m)\, A_\sigma x^{\sigma-n_m-1} + \ldots \tag{4}$$

Но

$$\frac{d^{n_m+1}}{dx^{n_m+1}} \left\{ \varphi_k(x)\, e^{(m-k)x} \right\} = \psi_k(x)\, e^{(m-k)x}, \tag{5}$$

где $\psi_k(x)$ — полином от x такой же степени, что и $\varphi_k(x)$. Положим

$$\Psi(x, y) = \psi_0 y^{m-1} + \psi_1 y^{m-2} + \ldots + \psi_k y^{m-1-k} + \ldots + \psi_{m-1}, \tag{6}$$

тогда

$$\Psi(x, e^x) = \sum_{k=0}^{m-1} \psi_k(x)\, e^{(m-1-k)x}.$$

С помощью соотношений (5) и (4) это равенство переписывается в виде

$$\Psi(x, e^x) = e^{-x}[\sigma(\sigma-1)\ldots(\sigma-n_m) A_\sigma x^{\sigma-n_m-1} + \ldots] = \\ = \sigma(\sigma-1)\ldots(\sigma-n_m) A_\sigma x^{\sigma-n_m-1} + \ldots \tag{7}$$

Обозначим через σ_1 показатель, аналогичный σ и определяемый полиномом максимального порядка относительно системы степеней $m-1$, $n_0,\ n_1, \ldots,\ n_{m-1}$. Равенство (7) показывает, что имеет место соотношение

$$\sigma_1 \geqslant \sigma - n_m - 1. \tag{8}$$

Если, далее, обозначить через σ_p показатель, определяемый полиномом максимального порядка относительно системы степеней $m-p$, n_0, n_1, ..., n_{m-p}, то по аналогии с (8) можно написать

$$\sigma_p \geqslant \sigma_{p-1} - n_{m-p+1} - 1. \tag{9}$$

Полагая $p = m$, мы видим, что σ_m определяется полиномом максимального порядка относительно системы степеней 0, n_0; но в этом случае $\Phi(x, y) = \varphi_0(x) =$ полиному степени не выше n_0. Максимальный порядок, очевидно, будет достигнут, когда $\varphi_0(x)$ будет одночленом степени n_0; отсюда имеем

$$\sigma_m = n_0. \tag{10}$$

Придавая в (9) числу p последовательно значения 1, 2, ..., m и складывая почленно полученные неравенства, будем иметь

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \ldots + \sigma_m \geqslant \sigma + \sigma_1 + \ldots + \sigma_{m-1} - n_m - n_{m-1} - \ldots - n_1 - m,$$

$$\sigma_m \geqslant \sigma - n_m - n_{m-1} - \ldots - n_1 - m.$$

Равенство (10) позволяет переписать это соотношение в виде

$$\sigma \leqslant m + n_0 + n_1 + \ldots + n_m.$$

Соединяя полученный результат с соотношением (2), получаем

$$\sigma = m + n_0 + n_1 + \ldots + n_m. \tag{11}$$

Таким образом в соотношении (2) знак неравенства на самом деле не может иметь места.

§ 5. Нетрудно убедиться на основании (11), что в соотношении (8) также всегда имеет место знак равенства. Отсюда следует, что определенный равенствами (5) и (6) полином $\Psi(x, y)$ имеет максимальный порядок относительно системы степеней $m-1$, n_0, n_1, ..., n_{m-1}.

Теорема § 3 показывает, что всякий другой полином максимального порядка относительно той же системы степеней может отличаться от $\Psi(x, y)$ лишь постоянным множителем.

Таким образом мы имеем возможность, располагая полиномом максимального порядка относительно системы степеней m, n_0, n_1, ..., n_m, получить полином максимального порядка относительно системы степеней $m-1$, n_0, n_1, ..., n_{m-1} с помощью повторного диференцирования. Это обстоятельство не имеет непосредственного практического значения. Однако замеченная связь полиномов может быть использована в обратном направлении, и тогда получаются весьма удобные приемы разыскания максимальных полиномов.

§ 6. Предположим, что полином

$$\Psi(x, y) = \sum_{k=0}^{m-1} \psi_k(x)\, y^{m-1-k} \tag{12}$$

является максимальным для системы $m-1$, n_0, n_1, ..., n_{m-1}. Если определить *полиномы* $\varphi_k(x)$ при $k = 0, 1, \ldots, m-1$ соотношениями (5):

$$\frac{d^{n_m+1}}{dx^{n_m+1}} \left\{ \varphi_k(x)\, e^{(m-k)x} \right\} = \psi_k(x)\, e^{(m-k)x},$$

то полином

$$\Phi(x, y) = \sum_{k=0}^{m-1} \varphi_k(x)\, y^{m-k} + \varphi_m(x) \tag{13}$$

при соответственном выборе $\varphi_m(x)$ будет максимальным относительно системы $m, n_0, \ldots, n_m$. На основании теоремы § 3 всякий другой максимальный полином может отличаться от него лишь постоянным множителем.

Так как равенство (5) должно быть использовано для нахождения искомого полинома $\varphi_k(x)$ по заданному полиному $\psi_k(x)$, то его нужно переписать в виде

$$\varphi_k(x) = Ce^{(k-m)x} \int \psi_k(x)\, e^{(m-k)x}\, dx^{n_m+1}. \tag{14}$$

Здесь мы присоединили постоянный множитель C, один и тот же для всех k. Равенство (14) вполне определяет $\varphi_k(x)$, так как постоянные повторного интегрирования, очевидно, вполне определяются тем условием, что $\varphi_k(x)$ должен быть полиномом.

Из всех коэфициентов полинома $\Phi(x, y)$ только один, последний, $\varphi_m(x)$ должен определяться независимо от коэфициентов предшествующего полинома $\Psi(x, y)$.

§ 7. Фактическое вычисление полиномов $\varphi_k(x)$ не представляет никаких затруднений. В самом деле, при вычислении по формуле (14) нас интересуют только те значения интеграла $\int \psi(x)\, e^{px}\, dx^q$, которые имеют вид $F(x)\, e^{px}$, где F — полином. А в таком случае вполне допустимо написать равенство

$$\int \psi(x)\, e^{px}\, dx^q = \frac{d^{-q}}{dx^{-q}} \{\psi(x)\, e^{px}\} \tag{15}$$

и воспользоваться для вычисления правой части известной формулой Лейбница для диференцирования произведения двух функций. В самом деле, формальное применение правила Лейбница дает в нашем случае конечную сумму типа $F(x)\, e^{px}$, и точность соотношения автоматически устанавливается с помощью q-кратного диференцирования.

Применение формулы Лейбница дает

$$\frac{d^{-q}}{dx^{-q}} \{e^{px} \psi(x)\} = \frac{d^{-q}}{dx^{-q}} (e^{px}) \psi(x) + (-q) \frac{d^{-q-1}}{dx^{-q-1}} (e^{px}) \psi'(x) +$$
$$+ \frac{(-q)(-q-1)}{1 \cdot 2} \frac{d^{-q-2}}{dx^{-q-2}} (e^{px}) \psi''(x) +$$
$$+ \frac{(-q)(-q-1)(-q-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \frac{d^{-q-3}}{dx^{-q-3}} (e^{px}) \psi'''(x) + \ldots =$$
$$= \frac{e^{px}}{p^q} \psi(x) - q \frac{e^{px}}{p^{q+1}} \psi'(x) + \frac{q(q+1)}{1 \cdot 2} \frac{e^{px}}{p^{q+2}} \psi''(x) -$$
$$- \frac{q(q+1)(q+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \frac{e^{px}}{p^{q+3}} \psi'''(x) + \ldots$$

362116

Отсюда получаем равенство

$$(16)\qquad e^{-px}\int \psi(x)\,e^{px}\,dx^q = \frac{1}{p^q}\psi - \frac{q}{p^{q+1}}\psi' + \frac{q(q+1)}{1\cdot 2\,p^{q+2}}\psi'' - \frac{q(q+1)(q+2)}{1\cdot 2\cdot 3\,p^{q+3}}\psi''' + \dots$$

Так как ψ — полином, то ряд (16) автоматически обрывается и дает нам полиномиальное значение интеграла $e^{-px}\int \psi(x)\,e^{px}\,dx^q$.

§ 8. Пусть полиномы

$$\Phi(x,y) = \sum_{k=0}^{m} \varphi_k(x)\,y^{m-k},$$

$$\Psi(x,y) = \sum_{k=0}^{m-1} \psi_k(x)\,y^{m-1-k}$$

будут максимальными соответственно для систем $m,\ n_0,\ n_1,\ \dots,\ n_m$ и $m-1,\ n_0,\ n_1,\ \dots,\ n_{m-1}$. Равенства (14) и (16) позволяют написать рекуррентную формулу

$$(17)\quad \varphi_k = C\left\{\frac{1}{(m-k)^{n_m+1}}\psi_k - \frac{n_m+1}{(m-k)^{n_m+2}}\psi'_k + \frac{(n_m+1)(n_m+2)}{1\cdot 2\,(m-k)^{n_m+3}}\psi''_k - \frac{(n_m+1)(n_m+2)(n_m+3)}{1\cdot 2\cdot 3\,(m-k)^{n_m+4}}\psi'''_k + \dots\right\},$$

где можно последовательно положить $k=0,\ 1,\ \dots,\ m-1$. Полином $\varphi_m(x)$ может быть получен как сумма первых членов степенного разложения функции

$$-\sum_{k=0}^{m-1} \varphi_k(x)\,e^{(m-k)x},$$

до порядка n_m включительно.

Вычисление полинома $\varphi_m(x)$ вообще требует более сложных действий, чем вычисление остальных полиномов. Однако в наиболее интересных случаях полином $\varphi_m(x)$ может быть найден без всяких дополнительных вычислений по соображениям симметрии, что будет показано впоследствии.

§ 9. В качестве примера мы рассмотрим случай, когда числа n_k соответственно суть

$$n_0 = 0,\quad n_1 = 1,\quad n_2 = 2,\quad \dots,\quad n_m = m.$$

В этом случае мы, очевидно, разыскиваем алгебраическую кривую m-го порядка, имеющую при $x=0$ наивысшее соприкасание с линией $y=e^x$. При $m=1$, очевидно, можно принять $\psi_0 = 1,\ \psi_1 = -(1+x)$. При $m=2$ можно воспользоваться формулой (17), которая дает

$$\varphi_0 = C\cdot\frac{1}{2^3}\psi_0 = \frac{C}{2^3},\quad \varphi_1 = C(\psi_1 - 3\psi'_1) = C(2-x).$$

Проще всего принять $C=8$. Полином $\varphi_2(x)$ составляется из начальных слагаемых в разложении функции

$$-\varphi_0 e^{2x} - \varphi_1 e^x = -e^{2x} - 8(2-x)\,e^x,$$

откуда получаем

$$\varphi_2(x) = -17 - 10x - 2x^2.$$

Таким образом для системы степеней 2, 0, 1, 2 максимальные свойства имеет полином

$$\Phi_2(x, y) = y^2 + 8(2 - x)y - 17 - 10x - 2x^2. \tag{18}$$

Уравнение $\Phi_2(x, y) = 0$ представляет коническое сечение, имеющее в точке (0, 1) с кривою $y = e^x$ соприкасание наиболее высокого порядка.

Наконец, пусть $m = 3$, $\psi_0 = 1$, $\psi_1 = 8(2 - x)$, $\psi_2 = -17 - 10x - 2x^2$, $C = 81$. Формула (17) при $k = 0, 1, 2$ дает равенства

$$\varphi_0 = 1, \quad \varphi_1 = \frac{81}{2}(4 - x), \quad \varphi_2 = 81(-17 + 6x - 2x^2).$$

Кубический полином $\varphi_3(x)$ совпадает с совокупностью начальных слагаемых разложения функции

$$-\varphi_0 e^{3x} - \varphi_1 e^{2x} - \varphi_2 e^x,$$

откуда получаем

$$\varphi_3(x) = 1214 + \frac{1209}{2}x + 117x^2 + 9x^3.$$

Таким образом для системы степеней 3, 0, 1, 2, 3 максимальные свойства имеет полином

$$\Phi_3(x, y) = 2y^3 + 81(4 - x)y^2 + 162(-17 + 6x - 2x^2)y + 2428 + 1209x + 234x^2 + 18x^3. \tag{19}$$

Уравнение $\Phi_3(x, y) = 0$ дает плоскую кривую третьего порядка, имеющую в точке (0, 1) соприкасание наиболее высокого порядка с показательной кривой $y = e^x$.

§ 10. Здесь мы рассмотрим случай, когда $m = 1$, а числа n_0 и n_1 остаются произвольными.

При $m = 0$ мы согласно § 4 имеем $\psi_0 = x^{n_0}$. Формула (17) при $k = 0$ дает

$$\varphi_0(x) = C\left\{\psi_0 - (n_1 + 1)\psi_0' + \frac{(n_1 + 1)(n_2 + 2)}{1 \cdot 2}\psi_0'' - \frac{(n_1 + 1)(n_1 + 2)(n_1 + 3)}{1 \cdot 2 \cdot 3}\psi_0''' + \dots\right\} = \tag{20}$$

$$= C\left\{x^{n_0} - (n_1 + 1)n_0 x^{n_0 - 1} + \frac{(n_1 + 2)(n_1 + 1)n_0(n_0 - 1)}{1 \cdot 2}x^{n_0 - 2} - \frac{(n_1 + 3)(n_1 + 2)(n_1 + 1)n_0(n_0 - 1)(n_0 - 2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}x^{n_0 - 3} + \dots\right\}.$$

Для вычисления $\varphi_1(x)$ можно воспользоваться следующими соображениями. Имеем равенство

$$\varphi_0(x)e^x + \varphi_1(x) = Ax^{1 + n_0 + n_1} + \dots,$$

которое после замены x на $-x$ дает

$$\varphi_0(-x)e^{-x} + \varphi_1(-x) = \pm Ax^{1 + n_0 + n_1} + \dots,$$

или после умножения на e^x

$$\varphi_1(-x)\,e^x+\varphi_0(-x)=\pm Ax^{1+n_0+n_1}+\ldots$$

Последнее соотношение показывает, что полином $\varphi_1(-x)\,y+\varphi_0(-x)$ должен быть максимальным для системы степеней 1, n_1, n_0, а потому $\varphi_1(x)$ отличается лишь множителем от $\varphi_0(-x)$, где $\varphi_0(x)$ вычисляется согласно формуле (20) для системы 1, n_1, n_0; таким образом получаем

$$(21)\qquad \varphi_1(x)=C'\left\{x^{n_1}+(n_0+1)\,n_1x^{n_1-1}+\right.$$
$$\left.+\frac{(n_0+2)\,(n_0+1)\,n_1\,(n_1-1)}{1\cdot2}\,x^{n_1-2}+\ldots\right\}.$$

Между постоянными C и C' должна быть зависимость, которую нетрудно найти на основании равенства

$$\varphi_0(0)+\varphi_1(0)=0,$$

вытекающего из разложения функции $\varphi_0e^x+\varphi_1$. Так как в силу равенств (20) и (21)

$$\varphi_0(0)=(-1)^{n_0}(n_1+1)\,(n_1+2)\ldots(n_1+n_0)\,C,$$
$$\varphi_1(0)=(n_0+1)\,(n_0+2)\ldots(n_0+n_1)\,C',$$

то получаем соотношение

$$(-1)^{n_0}(n_1+1)\,(n_1+2)\ldots(n_1+n_0)\,C+$$
$$+(n_0+1)\,(n_0+2)\ldots(n_0+n_1)\,C'=0,$$

которое можно написать в виде

$$(-1)^{n_0-1}\,Cn_1!=C'\,n_0!.$$

Иногда удобно выбор постоянной C сделать с помощью условия $\varphi_0(0)=1$, откуда получаем

$$C=\frac{(-1)^{n_0}}{(n_1+1)\ldots(n_1+n_0)},\qquad C'=-\frac{1}{(n_0+1)\ldots(n_0+n_1)}.$$

Равенства (20) и (21) могут быть переписаны теперь в виде

$$(22)\quad\begin{cases}\varphi_0(x)=1-\dfrac{n_0}{n_1+n_0}\,x+\dfrac{n_0\,(n_0-1)}{1\cdot2\,(n_1+n_0)\,(n_1+n_0-1)}\,x^2-\\ \qquad-\dfrac{n_0\,(n_0-1)\,(n_0-2)}{1\cdot2\cdot3\,(n_1+n_0)\,(n_1+n_0-1)\,(n_1+n_0-2)}\,x^3+\ldots,\\ -\varphi_1(x)=1+\dfrac{n_1}{n_1+n_0}\,x+\dfrac{n_1\,(n_1-1)}{1\cdot2\,(n_1+n_0)\,(n_1+n_0-1)}\,x^2+\\ \qquad+\dfrac{n_1\,(n_1-1)\,(n_1-2)}{1\cdot2\cdot3\,(n_1+n_0)\,(n_1+n_0-1)\,(n_1+n_0-2)}\,x^3+\ldots\end{cases}$$

Формулы (22) были указаны Паде, который, однако, получил их совершенно другим путем [1]).

---

[1]) См. H. Padé, Mémoire sur les développements en fractions continues de la fonction exponentielle..., Ann. École Norm. (3), t. 16 (1899). См. также O. Perron, Die Lehre von den Kettenbrüchen, 1913, Kap. 10, Die Padésche Tafel.

§ 11. Здесь мы рассмотрим случай, когда число m остается произвольным, а все числа $n_0, n_1, \ldots, n_m$ равны между собою:

$$n_0 = n_1 = \ldots = n_m = n. \tag{23}$$

Равенство (17) в этом случае принимает вид

$$\varphi_k = C\left\{\frac{1}{(m-k)^{n+1}}\Phi_k - \frac{n+1}{(m-k)^{n+2}}\Phi_k' + \frac{(n+1)(n+2)}{1\cdot 2\,(m-k)^{n+3}}\Phi_k'' - \ldots\right\}. \tag{24}$$

Здесь $k = 0, 1, \ldots, m-1$. Однако вычисления могут быть сокращены наполовину. В самом деле, пишем равенство

$$\sum_{k=0}^{m} \varphi_k(x)\, e^{(m-k)x} = A_\sigma x^\sigma + \ldots, \tag{25}$$

заменяем x на $-x$ и затем умножаем обе части на $e^{mx} = 1 + mx + \ldots$; получаем соотношение

$$e^{mx} \sum_{k=0}^{m} \varphi_k(-x)\, e^{(k-m)x} = A_\sigma (-1)^\sigma x^\sigma + \ldots,$$

которое можно переписать в виде

$$\sum_{k=0}^{m} \varphi_k(-x)\, e^{kx} = A_\sigma (-1)^\sigma x^\sigma + \ldots,$$

или, после замены k на $m-k$:

$$\sum_{k=0}^{m} \varphi_{m-k}(-x)\, e^{(m-k)x} = A_\sigma (-1)^\sigma x^\sigma + \ldots \tag{26}$$

Умножая (26) почленно на $(-1)^\sigma$ и вычитая из (25), получим

$$\sum [\varphi_k(x) - (-1)^\sigma \varphi_{m-k}(-x)]\, e^{(m-k)x} = Bx^{\sigma+1} + \ldots \tag{27}$$

Так как степень полинома $\varphi_k(x) - (-1)^\sigma \varphi_{m-k}(-x)$ не превосходит n, то соотношение (27) совместимо со свойством показателя σ только в том случае, когда обе его части тождественно равны нулю. Отсюда получаем тождество

$$\varphi_k(x) = (-1)^\sigma \varphi_{m-k}(-x). \tag{28}$$

Полагая $k = m$, получаем недоставшее равенство для вычисления $\varphi_m(x)$, именно

$$\varphi_m(x) = (-1)^\sigma \varphi_0(-x). \tag{29}$$

Равенство (28) позволяет наполовину сократить вычисление полиномов $\varphi_k(x)$.

Нетрудно видеть, что соображения, с помощью которых были получены равенства (28)—(29), сохраняются полностью, если вместо условий (23) предположить, что для всех значений k выполняется равенство

$$n_k = n_{m-k}. \tag{30}$$

§ 12. Рассмотрим ближе случай, когда $n=1$. Мы будем пользоваться при этом обозначением

$$(31)\quad \Phi_m(x,\ y)=\varphi_{0,m}y^m+\varphi_{1,m}y^{m-1}+\ldots+\varphi_{k,m}y^{m-k}+\ldots+\varphi_{m,m}.$$

Здесь все коэфициенты $\varphi_{k,m}$ являются линейными функциями. Равенство (24) дает нам рекуррентную формулу

$$(32)\quad \varphi_{k,m}=C_m\left\{\frac{\varphi_{k,m-1}}{(m-k)^2}-\frac{2\varphi'_{k,m-1}}{(m-k)^3}\right\}.$$

Так как в этом случае $\sigma=2m+1$, то равенства (28)—(29) дают

$$(33)\quad \varphi_{k,m}(x)=-\varphi_{m-k,m}(-x),\quad \varphi_{m,m}(x)=-\varphi_{0,m}(-x).$$

Всего удобнее выбрать $C_m=m^2$.

Сначала принимаем $m=1$; формулы (20) и (21) дают

$$(34)\quad \varphi_{0,1}=x-2,\quad \varphi_{1,1}=x+2.$$

Для $m=2$ получаем с помощью формул (34), (32), (33)

$$(35)\quad \varphi_{0,2}=x-3,\quad \varphi_{1,2}=2^2x.\quad \varphi_{2,2}=x+3.$$

Для $m=3$ получаем с помощью формул (35), (32), (33)

$$(36)\quad \begin{cases}\varphi_{0,3}=x-\frac{2}{1}-\frac{2}{2}-\frac{2}{3},\quad \varphi_{1,3}=3^2\left(x-\frac{2}{2}\right),\\ \varphi_{2,3}=3^2\left(x+\frac{2}{2}\right),\quad \varphi_{3,3}=x+\frac{2}{1}+\frac{2}{2}+\frac{2}{3}.\end{cases}$$

Для $m=4$ аналогичным путем получаем

$$(37)\quad \begin{cases}\varphi_{0,4}=x-\frac{2}{1}-\frac{2}{2}-\frac{2}{3}-\frac{2}{4},\quad \varphi_{1,4}=4^2\left(x-\frac{2}{2}-\frac{2}{3}\right),\quad \varphi_{2,4}=6^2x,\\ \varphi_{3,4}=4^2\left(x+\frac{2}{2}+\frac{2}{3}\right),\quad \varphi_{4,4}=x+\frac{2}{1}+\frac{2}{2}+\frac{2}{3}+\frac{2}{4}.\end{cases}$$

Для $m=5$ получаем

$$(38)\quad \begin{cases}\varphi_{0,5}=x-\frac{2}{1}-\frac{2}{2}-\frac{2}{3}-\frac{2}{4}-\frac{2}{5},\quad \varphi_{1,5}=5^2\left(x-\frac{2}{2}-\frac{2}{3}-\frac{2}{4}\right),\\ \varphi_{2,5}=10^2\left(x-\frac{2}{3}\right),\quad \varphi_{3,5}=10^2\left(x+\frac{2}{3}\right),\\ \varphi_{4,5}=5^2\left(x+\frac{2}{2}+\frac{2}{3}+\frac{2}{4}\right),\quad \varphi_{5,5}=x+\frac{2}{1}+\frac{2}{2}+\frac{2}{3}+\frac{2}{4}+\frac{2}{5}.\end{cases}$$

Рассматривая равенства (34)—(38), нетрудно путем индукции притти к следующим соотношениям:

$$
(39)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\varphi_{0,m}=x-2\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k},\\
&\varphi_{1,m}=m^2\left(x-2\sum_{k=2}^{m-1}\frac{1}{k}\right),\\
&\varphi_{2,m}=\left(\frac{m(m-1)}{1.2}\right)^2\left(x-2\sum_{k=3}^{m-2}\frac{1}{k}\right),\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\varphi_{p,m}=\left(\frac{m(m-1)\dots(m-p+1)}{1\cdot 2\cdot 3\dots p}\right)^2\left(x-2\sum_{k=p+1}^{m-p}\frac{1}{k}\right)\quad \left(p<\frac{m}{2}\right),\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\varphi_{m-2,m}=\left(\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}\right)^2\left(x+2\sum_{k=3}^{m-2}\frac{1}{k}\right),\\
&\varphi_{m-1,m}=m^2\left(x+2\sum_{k=2}^{m-1}\frac{1}{k}\right),\\
&\varphi_{m,m}=x+2\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k}.
\end{aligned}
\right.
$$

Если m — число четное, то средний коэфициент $\varphi_{m/2,m}$ определяется равенством

$$
(40)\qquad \varphi_{m/2,m}=\left(\frac{m(m-1)\dots\left(m-\frac{m}{2}+1\right)}{1\cdot 2\cdot 3\dots\frac{m}{2}}\right)^2 x.
$$

Равенства (39) и (40) могут быть доказаны переходом от m к $m+1$.

Для оценки точности получаемых приближений рассмотрим корни x_m уравнений первой степени $\Phi_m(x, 2)=0$, которые должны быть близкими к числу $\ln 2=0,69314718$. После нетрудных вычислений получаем

$$
x_1=\frac{2}{3}=0,67,\quad x_2=\frac{9}{13}=0,6923,\quad x_3=\frac{131}{189}=0,69312,
$$

$$
x_4=\frac{1335}{1926}=0,6931470,\quad x_5=\frac{34997}{50490}=0,69314715.
$$

Эти результаты показывают, что числа x_m при возрастании m стремятся к пределу $\ln 2$ со значительной быстротой.

§ 13. С помощью изложенных приемов нетрудно получить в качестве примеров следующие полиномы:

$$
\Phi_{1,2}=(x^2-6x+12)y-(x^2+6x+12),
$$

$$
\Phi_{2,2}=(x^2-9x+24)y^2-8(x^2+6)y+x^2+9x+24,
$$

$$\Phi_{2,2} = \left(x^2 - 11x + 34\frac{1}{3}\right)y^3 - 27(x^2 - 3x + 9)y^2 +$$
$$+ 27(x^2 + 3x + 9)y - \left(x^2 + 11x + 34\frac{1}{3}\right),$$
$$\Phi_{1,3} = (x^3 - 12x^2 + 60x - 120)y + x^3 + 12x^2 + 60x + 120,$$
$$\Phi_{2,3} = (x^3 - 18x^2 + 123x - 315)y^2 + 16(x^3 + 24x)y +$$
$$+ x^3 + 18x^2 + 123x + 315,$$
$$\Phi_{3,3} = \left(x^3 - 22x^2 + 177\frac{2}{3}x - 523\frac{4}{9}\right)y^3 +$$
$$+ 81(x^3 - 6x^2 + 39x - 63)y^2 + 81(x^3 + 6x^2 + 39x + 63)y +$$
$$+ x^3 + 22x^2 + 177\frac{2}{3}x + 523\frac{4}{9}.$$

Для проверки можно воспользоваться корнями уравнений $\Phi_{m,n}(1, y) = 0$, которые мы обозначим через $\eta_{m,n}$. Числа $\eta_{m,n}$ с возрастанием индексов m и n должны приближаться к e. Выполняя вычисления, мы получим

$$\eta_{1,2} = \frac{19}{7} = 2{,}714, \quad \eta_{2,2} = 2{,}71824, \quad \eta_{3,2} = 2{,}71828220,$$
$$\eta_{1,3} = \frac{193}{71} = 2{,}71831, \quad \eta_{2,3} = 2{,}718281837,$$
$$\eta_{3,3} = 2{,}718281828467 \approx e + 8 \cdot 10^{-12}.$$

Отсюда видим, что числа $\eta_{m,n}$ стремятся к e со значительной быстротой.

Можно поставить задачу о разыскании общих формул для полиномов $\varphi_k(x)$ при $n = 2, 3, \ldots$ Эти формулы могут быть найдены с помощью соотношения (17) и решения систем уравнений в конечных разностях. Однако ввиду сложности получаемых выражений мы не будем останавливаться на этих вычислениях.

§ 14. Рассмотрим теперь случай $m = 1$, $n_0 = n_1 = n$. Имеем $\sigma = 2n + 1$, $(-1)^\sigma = -1$. Формулы (20) и (21) дают

$$\Phi_{1,n}(x, y) = -\psi_n(-x) + \psi_n(x),$$

где

$$(41) \quad \psi_n(x) = x^n + (n+1)nx^{n-1} + \frac{(n+2)(n+1)n(n-1)}{1 \cdot 2}x^{n-2} + \ldots$$

Вследствие максимальности полинома $\Phi_{1,n}$ можем написать

$$-e^x\psi_n(-x) + \psi_n(x) = A_n x^{2n+1} + \ldots,$$

причем $A_n \neq 0$. Умножая обе части этого равенства на $e^{-\frac{x}{2}} = 1 - \frac{x}{2} + \ldots$, получим соотношение

$$e^{-\frac{x}{2}}\psi_n(x) - e^{\frac{x}{2}}\psi_n(-x) = A_n x^{2n+1} + \ldots$$

Так как в левой части здесь стоит нечетная функция, то справа мы должны иметь только нечетные показатели, т. е. полученное равенство в более подробном виде переписывается так:

$$(42) \quad e^{-\frac{x}{2}}\psi_n(x) - e^{\frac{x}{2}}\psi_n(-x) = A_n x^{2n+1} + B_n x^{2n+3} + \ldots$$

Заменяя n на $n-1$, получаем

$$e^{-\frac{x}{2}}\psi_{n-1}(x)-e^{\frac{x}{2}}\psi_{n-1}(-x)=A_{n-1}x^{2n-1}+B_{n-1}x^{2n+1}+\ldots, \tag{43}$$

причем $A_{n-1}\neq 0$. Умножая обе части равенства (43) на $\frac{A_n}{A_{n-1}}x^2$ и затем почленно вычитая из (42), получаем

$$e^{-\frac{x}{2}}\left\{\psi_n(x)-\frac{A_n}{A_{n-1}}x^2\psi_{n-1}(x)\right\}-e^{\frac{x}{2}}\left\{\psi_n(-x)-\frac{A_n}{A_{n-1}}(-x)^2\psi_n(-x)\right\}=$$
$$=\frac{A_{n-1}B_n-A_nB_{n-1}}{A_{n-1}}x^{2n+3}+\ldots$$

Если положить для краткости

$$\psi_n(x)-\frac{A_n}{A_{n-1}}x^2\psi_{n-1}(x)=\theta(x),$$

то полученное равенство переписывается в виде

$$e^{-\frac{x}{2}}\theta(x)-e^{\frac{x}{2}}\theta(-x)=Cx^{2n+3}+\ldots$$

или

$$-e^x\theta(-x)+\theta(x)=Cx^{2n+3}+\ldots$$

Так как степень полинома $\theta(x)$ равна $n+1$, то на основании теоремы § 3 $\theta(x)$ отличается лишь постоянным множителем от $\psi_{n+1}(x)$. Поэтому должно иметь место равенство

$$\psi_{n+1}(x)=C_1\psi_n(x)+C_2x^2\psi_{n-1}(x), \tag{44}$$

где C_1 и C_2 — постоянные. Так как старшие коэфициенты полиномов ψ_{n+1} и ψ_{n-1} равны единице, то $C_2=1$. Для определения C_1 полагаем $x=0$; получаем

$$\psi_{n+1}(0)=C_1\psi_n(0),$$
$$(n+2)(n+3)\ldots(2n+1)(2n+2)=C_1(n+1)(n+2)\ldots 2n,$$

откуда находим $C_1=4n+2$. Равенство (44) принимает вид

$$\psi_{n+1}(x)=(4n+2)\psi_n(x)+x^2\psi_{n-1}(x). \tag{45}$$

Таким образом полиномы $\psi_n(x)$ можно вычислять на основании рекуррентной формулы.

§ 15. Определим полином $\theta_n(x)$ с помощью формулы

$$\psi_n(x)=(n+1)(n+2)\ldots 2n\,\theta_n(x). \tag{46}$$

Нетрудно получить равенство

$$\theta_n(x)=1+\frac{n}{2n}x+\frac{1}{2!}\frac{n(n-1)}{2n(2n-1)}x^2+\frac{1}{3!}\frac{n(n-1)(n-2)}{2n(2n-1)(2n-2)}x^3+\ldots \tag{47}$$

Равенство (47) позволяет установить соотношение

$$\lim_{n\to\infty}\theta_n(x)=e^{\frac{x}{2}}. \tag{48}$$

Для этого достаточно сослаться на абсолютную сходимость степенного разложения функции $e^{\frac{x}{2}}$ и обратить внимание на то, что члены суммы (47) по абсолютной величине меньше соответствующих членов ряда для $e^{\frac{x}{2}}$, причем пределом любого члена из состава $\theta_n(x)$ при $n \to \infty$ служит соответствующий член ряда для $e^{\frac{x}{2}}$.

Аналогично имеем

$$\lim_{n\to\infty} \theta_n(-x) = e^{-\frac{x}{2}}.$$

Далее,

$$\frac{\psi_n(x)}{\psi_n(-x)} = \frac{\theta_n(x)}{\theta_n(-x)}$$

и, значит,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\psi_n(x)}{\psi_n(-x)} = \frac{e^{x/2}}{e^{-x/2}} = e^x. \tag{49}$$

§ 16. Нетрудно получить рекуррентную формулу для $\theta_n(x)$. Мы должны иметь соотношение типа

$$\theta_{n+1}(x) = C_1\theta_n(x) + C_2x^2\theta_{n-1}(x), \tag{50}$$

где C_1 и C_2 — постоянные. Так как $\theta_n(0) = 1$, то полагая $x = 0$, получим $C_1 = 1$. Для определения C_2 приравниваем коэфициенты при x^2 в обеих частях равенства (50); получаем

$$\frac{n}{4(2n+1)} = \frac{n-1}{4(2n-1)} + C_2,$$

откуда $C_2 = \frac{1}{4(4n^2-1)}$. Равенство (50) принимает теперь вид

$$\theta_{n+1}(x) = \theta_n(x) + \frac{x^2}{4(4n^2-1)}\theta_{n-1}(x). \tag{51}$$

Положим теперь $\theta_n(2) = U_n$. Числа U_n определяются рекуррентной формулой

$$U_{n+1} = U_n + \frac{U_{n-1}}{4n^2-1} \tag{52}$$

и начальными условиями

$$U_0 = 1, \quad U_1 = 2. \tag{53}$$

Из равенства (48) вытекает, что $\lim\limits_{n\to\infty} U_n = e$. Кроме того, формула (47) дает

$$U_n = 1 + 1 + \frac{1}{2!}\frac{2n-2}{2n-1} + \frac{1}{3!}\frac{(2n-2)(2n-4)}{(2n-1)(2n-2)} + \dots \tag{54}$$
$$\dots + \frac{1}{n!}\frac{(2n-2)\dots(2n-2n+2)}{(2n-1)\dots(2n-n+1)}.$$

§ 17. Формула (45) дает соотношения

$$\begin{cases} \psi_{n+1}(x) = (4n+2)\psi_n(x) + x^2\psi_{n-1}(x), \\ \psi_{n+1}(-x) = (4n+2)\psi_n(-x) + x^2\psi_{n-1}(-x). \end{cases} \tag{55}$$

Так как $\phi_0(x) = 1$, $\phi_1(x) = x + 2$, то имеем

$$\frac{\phi_0(x)}{\phi_0(-x)} = 1, \quad \frac{\phi_1(x)}{\phi_1(-x)} = 1 + \frac{2x}{2-x}.$$

Эти равенства в соединении с соотношениями (55) приводят к формуле

$$(56) \qquad \frac{\phi_n(x)}{\phi_n(-x)} = 1 + \cfrac{2x}{2 - x + \cfrac{x^2}{6 + \cfrac{x^2}{10 + \cfrac{x^2}{14 + \ddots + \cfrac{x^2}{4n-2}}}}}.$$

Так как

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\phi_n(x)}{\phi_n(-x)} = e^x,$$

то отсюда получается известная формула Эйлера-Ламберта:

$$(57) \qquad e^x = 1 + \cfrac{2x}{2 - x + \cfrac{x^2}{6 + \cfrac{x^2}{10 + \cfrac{x^2}{14 + \ddots + \cfrac{x^2}{4n+2 + \ddots}}}}}$$

Так как предыдущий анализ установил существование предела (49) независимо от значения числа x, то бесконечная непрерывная дробь (57) должна быть сходящейся при любом x.

Отсюда нетрудно установить, что числа $\eta_{1,m}$ § 13 являются подходящими дробями порядков $3m - 1$ разложения e в обыкновенную непрерывную дробь.

SUR LE COEFFICIENT DE CORRÉLATION.

Par B. Hostinský (Brno).

Introduction. Le but de ce travail consiste à rechercher les conditions nécessaires et suffisantes pour que le coefficient de corrélation R_{mn} entre le $m^{\text{ième}}$ et le $n^{\text{ième}}$ terme d'une chaîne simple de Markoff se réduise à une fonction de la différence $n - m$. Le résultat (voir No 3 et 5 de ce travail) permet de préciser les relations entre les chaînes de Markoff et entre les suites de quantités aléatoires appelées par A. Khintchine schème stochastique stationnaire [1]).

La méthode employée dans la suite est voisine de celle que nous avons employée dans un travail précédent publié en collaboration avec J. Potoček [2]).

1. Soient $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(n)}, \ldots$ quantités aléatoires et supposons que chacune de ces quantités reçoive une des valeurs $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ et que les probabilités correspondantes soient liées en une chaîne simple de Markoff.

La chaîne est définie par les probabilités $p_i^{(n)}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots; i = 1, 2, \ldots, r)$, pour que l'on ait $x^{(n)} = \alpha_i$, et par les probabilités p_{ik} $(i, k = 1, 2, \ldots, r)$, pour que l'on ait $x^{(n+1)} = \alpha_k$, étant donné que $x^{(n)} = \alpha_i$. Désignons par $P_{ik}^{(n)}$ la probabilité de l'égalité $x^{(m+n)} = \alpha_k$, étant donné que $x^{(m)} = \alpha_i$. Nous avons

$$\sum_{i=1}^{k} p_i^{(n)} = 1 \quad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

$$P_{ik}^{(1)} = p_{ik}, \quad \sum_{k=1}^{r} P_{ik}^{(n)} = 1 \quad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

$$P_{ik}^{(m+n)} = \sum_{j=1}^{r} P_{ij}^{(m)} P_{jk}^{(n)} \quad (m, n = 1, 2, 3, \ldots), \tag{1}$$

$$p_k^{(n+1)} = \sum_{i=1}^{r} p_i^{(n)} p_{ik}. \quad (n = 1, 2, 3, \ldots). \tag{2}$$

---

[1]) A. Khintchine, Korrelationstheorie der stationären stochastischen Prozesse, Math. Annalen, t. 109 (1934), p. 604. [Русский перевод в „Успехах математических наук", вып. V, стр. 42—51. *Ред.*]

[2]) B. Hostinský-J. Potoček, Prispěvek k theorii Markovových řetězů (Rospravy České Akademie, II tř., Praha, sv. XLV, 1935; présenté le 18 octobre 1935). Voir aussi le résumé de ce travail: Chaînes de Markoff inverses (Bulletin International de l'Académie des Sciences de Bohême, 1935).

2. Soit $E(x)$ la valeur moyenne (espérance mathématique) de x. Nous avons

$$E(x^{(n)}) = \sum_{i=1}^{r} p_i^{(n)} \alpha_i,$$

$$E[x^{(n)} - E(x^{(n)})] = E(x^{(n)}) - E(x^{(n)}) = 0,$$

$$E[(x^{(n)})^2] = \sum_{i=1}^{r} p_i^{(n)} \alpha_i^2,$$

$$E[(x^{(n)})^2] - [E(x^{(n)})]^2 = \sum_{i=1}^{r} p_i^{(n)} \alpha_i^2 - \Big[\sum_{i=1}^{r} p_i^{(n)} \alpha_i\Big]^2.$$

Le coefficient de corrélation R_{mn} entre $x^{(m)}$ et $x^{(n)}$ (nous supposons que $m < n$) est donné par la formule

$$R_{mn} = \frac{E(x^{(m)} x^{(n)}) - E(x^{(m)}) E(x^{(n)})}{\sqrt{E[(x^{(m)})^2] - [E(x^{(m)})]^2}\ \sqrt{E[(x^{(n)})^2] - [E(x^{(n)})]^2}},$$

où

$$E(x^{(m)} x^{(n)}) = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{r} p_i^{(m)} P_{ij}^{(n-m)} \alpha_i \alpha_j.$$

Introduisons maintenant les quantités $y^{(m)}$ par l'équation

$$y^{(m)} = \frac{x^{(m)} - E(x^{(m)})}{\sqrt{E[(x^{(m)})^2] - [E(x^{(m)})]^2}}.$$

Il résulte de cette définition que

$$E(y^{(m)}) = 0 \quad \text{pour } m = 1, 2, 3, \ldots,$$
$$E[(y^{(m)})^2] = 1 \quad \text{pour } m = 1, 2, 3, \ldots$$

et

$$E(y^{(m)} y^{(n)}) = R_{mn}.$$

Le coefficient de corrélation entre $x^{(m)}$ et $x^{(n)}$ est donc égal à la valeur moyenne du produit $y^{(m)} y^{(n)}$.

3. Soit $\beta_j^{(m)}$ la valeur que prend $y^{(m)}$ quand $x^{(m)} = \alpha_j$; nous avons

$$\beta_j^{(m)} = \frac{\alpha_j - \sum_{i=1}^{r} p_i^{(m)} \alpha_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{r} p_i^{(m)} \alpha_i^2 - \Big[\sum_{i=1}^{r} p_i^{(m)} \alpha_i\Big]^2}}.$$

La probabilité de l'égalité $y^{(m)} = \beta_j^{(m)}$ est égale à $p_j^{(m)}$, donc

$$R_{mn} = E(y^{(m)} y^{(n)}) = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{r} p_i^{(m)} P_{ij}^{(n-m)} \beta_i^{(m)} \beta_j^{(n)}.$$

Cette formule montre que R_{mn} dépend essentiellement des deux indices m et n; *pour que* R_{mn} *se réduise à une fonction d'une seule variable* $n-m$, *il faut et il suffit que les quantités* $p_1^{(m)}, p_2^{(m)}, \ldots, p_r^{(m)}$ *soient indépendantes de* m, *c'est-à-dire que*

$$(3)\qquad \begin{cases} p_1^{(1)} = p_1^{(2)} = \ldots = p_1^{(m)} = \ldots, \\ p_2^{(1)} = p_2^{(2)} = \ldots = p_2^{(m)} = \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ p_r^{(1)} = p_r^{(2)} = \ldots = p_r^{(m)} = \ldots \end{cases}$$

La dernière ligne (3) est une conséquence de $r-1$ précédentes, car $p_1^{(m)} + p_2^{(m)} + \ldots + p_r^{(m)} = 1$.

4. Dans le cas où les limites

$$P_{ik} = \lim_{n\to\infty} P_{ik}^{(n)}$$

existent, il suffit, pour satisfaire aux conditions (3), de prendre

$$p_k^{(1)} = p_k^{(2)} = \ldots = p_k^{(n)} = \ldots = P_{sk} \quad (k = 1, 2, \ldots, r),$$

où s est une valeur fixe, mais arbitrairement choisie parmi 1, 2, ..., r. Car, si l'on pose, dans la formule (1), $n=1$, et si l'on y fait m augmenter indéfiniment, on obtient

$$P_{sk} = \sum_{i=1}^{r} P_{si}\, p_{ik},$$

donc

$$p_k^{(m+1)} = \sum_{i=1}^{r} p_i^{(m)} p_{ik}$$

comme l'exige la condition (2).

Le coefficient de corrélation sera alors représenté par la formule

$$(4)\qquad R_{mn} = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r} P_{si}\, P_{ij}^{(n-m)}\, \beta_i\, \beta_j,$$

où

$$\beta_j^{(m)} = \beta_j = \frac{\alpha_f - \sum_{i=1}^{r} P_{si}\,\alpha_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{r} P_{si}\,\alpha_i^2 - \left[\sum_{i=1}^{r} P_{si}\,\alpha_i\right]^2}}$$

ne dépend pas de m.

Dans le cas particulier où tous les p_{ik} sont positifs (*cas régulier* suivant Fréchet [3])) les limites P_{si} ne dépendent pas de s, il n'y a qu'une seule manière de satisfaire aux conditions (3). Un théorème de A. Kol-

[3]) Voir M. Fréchet, Compléments à la Théorie des Probabilités discontinues „en chaîne", Annali della R. Scuola Normale Superiore di Pisa, Serie II, vol. II (1933), p. 131—164.

mogoroff [4]) montre que, si les conditions (3) sont remplies, les limites de $P_{ik}^{(n)}$, pour n infini, existent et qu'elles ne dépendent pas de i.

La formule (4) exprime le coefficient de corrélation dans tous les cas où il ne dépend que de la différence $n-m$. En effet, les quantités P_{s1}, P_{s2}, ..., P_{sr} qui y figurent, s'obtiennent comme solution du système suivant d'équations linéaires à r inconnues $p_1, p_2, \ldots, p_r$:

$$p_k = \sum_{i=1}^{k} p_i p_{ik} \quad (k = 1, 2, \ldots, r),$$
$$p_1 + p_2 + \ldots + p_r = 1.$$

5. Le produit $P_{si} P_{ij}^{(n-m)}$ est égal à la probabilité, pour que l'on ait $y^{(n)} = \beta_j$, si $y^{(m)} = \beta_i$. Étant donné que

$$p_i^{(m)} = p_i^{(n)} = P_{si},$$

nous pouvons écrire

$$P_{si} P_{ij}^{(n-m)} = Q_{ij}^{(n-m)} P_{sj}, \tag{5}$$

où $Q_{ij}^{(n-m)}$ est la probabilité de l'équation $y^{(m)} = \beta_i$ étant donné que $y^{(n)} = \beta$ (toujours avec $m < n$). Le produit (5) est donc égal à la probabilité pour que les deux équations $y^{(m)} = \beta_i$ et $y^{(n)} = \beta_j$ aient lieu; R_{mn} est le coefficient de corrélation entre $y^{(m)}$ et $y^{(n)}$ aussi bien qu'entre $y^{(n)}$ et $y^{(m)}$, il est une fonction de la valeur absolue de la différence $n-m$, n et m étant quelconques.

En résumé, le coefficient de corrélation entre le $m^{\text{ième}}$ et le $n^{\text{ième}}$ terme de la chaîne de Markoff est en général une fonction de m et de n; si les conditions (3) sont satisfaites, il est une fonction de la seule variable $|n-m|$.

Le schème stationnaire considéré par A. Khintchine dans le travail cité (coefficient de corrélation étant une fonction de $|n-m|$) est plus général que les chaînes de Markoff en ce sens qu'il convient en général à des suites de variables aléatoires qui ne forment pas de chaîne. Mais une chaîne simple de Markoff ne rentre comme un cas particulier dans ce schème stationnaire que si les conditions (3) sont satisfaites.

---

[4]) A. Kolmogoroff, Zur Theorie der Markoffschen Ketten, Math. Annalen, t. 112 (1935), p. 155—160.

К ГЕОМЕТРИИ ТЕОРИИ ГАЛУА.

Б. Н. Делоне (Москва).

В высшей арифметике еще со времен Гаусса пользовались геометрическими интерпретациями, а в конце прошлого века в руках Минковского и Вороного геометрические методы в высшей арифметике образовали собою особый своеобразный и весьма изящный отдел математики, называемый геометрией чисел. Некоторые важные арифметические задачи, как задача о приведении квадратичных форм с большим числом переменных, задача о величине дискриминанта алгебраического поля, вопрос об обобщении алгорифма непрерывных дробей на случай более чем двух переменных, задача об основной области для неопределенной квадратичной формы, были решены как раз этими методами. Весьма любопытно, что аналогичной этой геометрии чисел „геометрии алгебры“ до сих пор не разработано. Более того, я не знаю, например, ни одной работы, где теория Галуа освещалась бы геометрически. Быть может, причина этого лежит в том, что сами те вопросы теории Галуа, в которых эти методы, очевидно, должны сыграть большую роль, начинают ставиться лишь в последнее время. К числу таких вопросов относится одна из важнейших до сих пор не решенных задач алгебры, так называемая обратная задача теории Галуа. Под прямой задачей теории Галуа мы понимаем следующую задачу, решенную самим Галуа: выяснить, от чего зависит алгебраическая структура поля, образованного заданным уравнением; оказывается, как выяснил Галуа, что это поле зависит от группы уравнения. Но можно поставить обратный вопрос: каковы все те поля, которые имеют заданную группу, как дать их классификацию и способ их построения? В частности, как известно, до сих пор даже не выяснен еще совсем частный в этой обратной теории вопрос: для всякой ли наперед заданной группы существуют поля (над абсолютно рациональным), которые имеют ее своею группой Галуа? В 1933—34 г., следуя моим указаниям, Д. К. Фаддеев показал, как методы геометрии теории Галуа изящнейшим образом решают обратную задачу для всех пяти групп, которые может иметь уравнение третьей, и для всех одиннадцати, которые может иметь уравнение четвертой степени (эти результаты будут подробно изложены в нашей монографии о кубических иррациональностях). Однако эти результаты представляют собою лишь первый образчик работы, относящейся к новому методу алгебраических исследований, пока совсем не затронутому математиками.

Я позволю себе в настоящей статье набросать самые первые общие параграфы этой теории, которую мне бы хотелось называть геометрией

теории Галуа. Таким образом я здесь прибавлю к многочисленным различным изложениям теории Галуа, среди которых имеется изящное изложение, данное Д. А. Граве в 1915 г., еще одно новое — геометрическое.

Решетки или *параллелепипедальные системы точек* (Punktgitter), как известно, являются тем основным объектом, свойства которого изучаются геометрией чисел. При этом, вообще говоря, на решетку a priori не налагается никаких дополнительных условий. Если называть суммой (разностью) двух точек пространства точку, каждая из координат которой есть сумма (разность) соответствующих координат складываемых (вычитаемых) точек, то понятие „решетка", как известно (см., например, мое дополнение к русскому переводу „Курса теории чисел" Дирихле), можно определить и так: дискретная совокупность точек n-мерного пространства, которая повторяется сложением и вычитанием. Напомним еще, что *подрешеткой* некоторой решетки мы называем часть ее точек, которая представляет собою также решетку, а *сгущением* или *центрировкой* (термин взят из кристаллографии) — решетку, которая получается добавлением к центрируемой решетке некоторых дальнейших точек, координаты которых по отношению к основным векторам центрируемой решетки дробно рациональны, так чтобы точки центрируемой решетки в совокупности с этими добавленными точками снова образовывали бы решетку. Будем, наконец, называть *произведением* двух точек пространства точку, каждая из координат которой есть произведение соответственных координат перемножаемых точек. Если произведение любых двух точек решетки есть опять точка этой решетки, то решетку эту мы будем называть *повторяющеюся умножением*. Сложение двух точек есть то же самое, что сложение векторов, идущих к этим точкам из начала координат, и может считаться операцией геометрической; но и умножение на точку имеет, по крайней мере в том случае, когда пространство вещественно, также простой геометрический смысл, а именно такое умножение равносильно с аффинным преобразованием пространства, сводящимся к сжатиям и растяжениям его по осям, коэфициентами которых (сжатий и растяжений) являются координаты той точки, на которую умножают. Геометрическое рассмотрение решеток, повторяющихся умножением, мы считаем основным вопросом геометрии алгебры.

Изучение решеток n-мерного пространства, повторяющихся умножением, как мы увидим дальше, эквивалентно изучению полей алгебраических иррациональных чисел, и надо думать, что изучение решеток бесконечно-мерного пространства, повторяющихся умножением, должно в будущем дать аналогичную теорию трансцендентных чисел. Надо думать, что, подобно тому как Гильберт, обобщив линейную n-мерную алгебру на бесконечно-мерное пространство, создал „геометрию анализа", весьма упростившую изучение многих вопросов анализа, вроде разложения по ортогональным функциям, решения интегральных уравнений и т. д.; подобно тому как Банах, обобщив на бесконечно-мерные пространства первые теоремы теории n-мерных выпуклых тел Минковского, получил теоремы, весьма важные для функционального анализа, — по всей вероятности так же обобщением теории n-мерных решеток, повторяющихся умножением, на бесконечно-мерные пространства будет получена некоторая общая теория трансцендентных чисел.

Что же касается теории Галуа, то это есть теория симметрий решеток, повторяющихся умножением, рассматриваемых совместно с теми осями, в которых они повторяются умножением.

§ 1. О решетках, повторяющихся умножением. Мы будем рассматривать n-мерное комплексное пространство K_n, т. е. точкой в K_n мы будем называть совокупность n комплексных чисел $x', x'', \ldots, x^{(n)}$, а сами эти числа — координатами точки в K_n. Рассмотрим n точек в K_n, $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$, причем для краткости мы обозначаем каждую точку одной буквой, так что ω_i, например, есть точка из K_n с координатами $\omega_i', \omega_i'', \ldots, \omega_i^{(n)}$. Предположим, что эти n точек расположены комплексно n-мерно с началом $(0, 0, \ldots, 0)$, т. е. что определитель из их координат отличен от нуля. В таком случае совокупность всех точек $\omega = u_1\omega_1 + u_2\omega_2 + \ldots + u_n\omega_n$, где $u_1, u_2, \ldots, u_n$ независимо друг от друга пробегают все целые рациональные числа, мы будем называть *n-мерной решеткой в K_n* и обозначать $[\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n]$. *Суммой, разностью* и *произведением* двух точек из K_n мы будем называть опять точку из K_n, каждая из координат которой есть соответственно сумма, разность или произведение соответствующих координат этих точек. Мы будем называть решетку в K_n *повторяющеюся умножением*, если произведение любых двух ее точек есть опять ее точка. *Максимальной* мы называем решетку в K_n, повторяющуюся умножением, если нет никакой ее центрировки, которая также повторяется умножением. Точку из K_n, отличную от начала координат и имеющую среди своих координат хоть одну, равную нулю, мы называем *делителем нуля*, а решетку, не имеющую среди своих точек делителей нуля, — *неприводимой*.

Теорема I. *Всякая максимальная n-мерная решетка в K_n или неприводима или есть прямая сумма неприводимых максимальных решеток, и обратно.*

Действительно, пусть $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ — базис рассматриваемой решетки. Тогда, если она повторяется умножением, то для всякой ее точки ω мы имеем

$$\begin{aligned}
\omega_1\omega &= a_{11}\omega_1 + a_{12}\omega_2 + \ldots + a_{1n}\omega_n,\\
\omega_2\omega &= a_{21}\omega_1 + a_{22}\omega_2 + \ldots + a_{2n}\omega_n,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\omega_n\omega &= a_{n1}\omega_1 + a_{n2}\omega_2 + \ldots + a_{nn}\omega_n,
\end{aligned}$$

где a_{ik} — целые рациональные, причем каждое из этих равенств эквивалентно совокупности n равенств, получающихся, если вместо точек ω_i, ω подставить их одноименные координаты $\omega_i^{(j)}$, $\omega^{(j)}$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$, т. е. ω удовлетворяет уравнению

$$(1)\qquad F(\omega) = \begin{vmatrix} a_{11} - \omega & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \omega & \ldots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} - \omega \end{vmatrix} = 0,$$

коэфициенты которого целые рациональные, а высший коэфициент равен 1, т. е. координаты точки ω суть целые алгебраические числа, — корни этого уравнения, — причем, если точку ω в рассматриваемой решетке взять общего положения, т. е. не имеющую одинаковых друг другу координат

и координат, равных нулю, то координаты ее исчерпывают *все* корни этого уравнения. Если $\omega = u_1\omega_1 + u_2\omega_2 + \ldots + u_n\omega_n$, то, как легко видеть, точка ω будет общего положения, если $u_1, u_2, \ldots, u_n$, например,— „лексикографическая система", т. е. u_2 гораздо больше u_1, u_3 гораздо больше u_2 и т. д. Если точка ω — общего положения, то определитель из координат точек ω, ω^2, ω^3, $\ldots$, ω^n, будучи произведением определителя Вандермонда на произведение координат точки ω, отличен от нуля, и эти n точек лежат n-мерно с началом координат. Поэтому каждая из координат любой точки θ рассматриваемой решетки выражается через соответственные координаты этих n точек линейно однородно с целыми или дробными рациональными коэфициентами, так как рассматриваемая решетка есть, очевидно, центрировка решетки, построенной на этих точках ω, ω^2, ω^3, $\ldots$, ω^n. В силу уравнения (1) каждая из координат $\theta^{(j)}$ точки θ имеет, следовательно, вид $\varphi(\omega^{(j)})$, где φ есть один и тот же для всех координат точки θ целый многочлен $(n-1)$-й степени с рациональными коэфициентами. Предположим, что уравнение (1) разлагается в поле рациональных чисел на неприводимые множители степеней n_1, n_2, $\ldots$, n_k, так что $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$, и пусть $\mathsf{A}_1, \mathsf{A}_2, \ldots, \mathsf{A}_k$ — соответствующие им алгебраические поля (т. е., собственно, каждому такому множителю соответствует связка сопряженных полей, например, первому A_1', A_1'', $\ldots$, $\mathsf{A}_1^{(n_1)}$). Разобьем оси K_n на комплексы $K_{n_1}, K_{n_2}, \ldots, K_{n_k}$, соответственно тому, по каким осям мы откладываем координаты точки ω, соответствующие этим связкам сопряженных полей. Построим в координатном подпространстве K_{n_1} все целые точки поля A_1, т. е. точки, координаты каждой из которых суть в соответственном порядке взятые сопряженные целые алгебраические числа поля A_1, в K_{n_2} — все целые точки поля A_2, и т. д. Мы получим так в каждой из гиперплоскостей $K_{n_1}, K_{n_2}, \ldots, K_{n_k}$ некоторую решетку, так как сумма и разность двух целых чисел поля есть опять целое число поля и система целых чисел поля дискретна. Составим теперь в K_n все возможные суммы и разности всех точек всех этих k решеток; получится некоторая n-мерная решетка в K_n, которая в силу сказанного о координатах точек θ содержит всю рассматриваемую решетку. Построенная решетка также повторяется умножением, так как произведение двух целых алгебраических чисел данного поля A_i есть опять целое алгебраическое число этого поля. В силу этого, ввиду того, что заданная решетка предположена максимальной, построенная решетка с ней совпадает.

Замечание I. Для немаксимальных решеток, повторяющихся умножением, теорема эта, вообще говоря, не имеет места, как показывает пример решетки всех точек двумерной плоскости с целыми рациональными координатами, которые у каждой точки обе одинаковой четности. Такая решетка, как легко видеть, повторяется умножением, имеет делителей нуля, т. е. не неприводима, и вместе с тем не есть прямая сумма двух одномерных решеток, лежащих на осях.

Замечание II. Теорему I можно, как я это и делаю в упомянутой выше монографии, доказать чисто геометрически, исходя непосредственно из того, что решетка повторяется умножением, вовсе не прибегая к теории уравнений, не используя ни уравнения (1), ни того, что координаты

точек решетки суть целые алгебраические числа. Но я предпочел здесь дать вышеприведенное доказательство, чтобы одновременно установить связь с обычной теорией алгебраических чисел.

§ 2. О неприводимых максимальных решетках данного числа измерений n и данной сигнатуры τ. Заметим прежде всего, что если уравнение (1) имеет σ вещественных корней и τ пар комплексно сопряженных корней, то, как это ясно из вывода теоремы I, соответственные координаты любой точки решетки также вещественны или комплексно сопряжены. Поэтому точки максимальной решетки лежат в K_n не где угодно, а в одном и том же так называемом сигнатурном сечении, определяемом *сигнатурой* τ решетки и нумерацией осей K_n. Будем обозначать через $\zeta^{(1)}, \zeta^{(2)}, \ldots, \zeta^{(\sigma)}$ σ вещественных координат точки решетки, взятых в каком-нибудь определенном порядке, и через $\xi^{(1)} + i\eta^{(1)}$, $\xi^{(1)} - i\eta^{(1)}$; $\xi^{(2)} + i\eta^{(2)}$, $\xi^{(2)} - i\eta^{(2)}$, $\ldots$; $\xi^{(\tau)} + i\eta^{(\tau)}$, $\xi^{(\tau)} - i\eta^{(\tau)}$, опять-таки в определенном порядке, — пары комплексных сопряженных ее координат. Мы будем тогда называть n-мерное вещественное пространство $\zeta^{(1)}, \zeta^{(2)}, \ldots, \zeta^{(\sigma)}, \xi^{(1)}, \eta^{(1)}, \xi^{(2)}, \eta^{(2)}, \ldots, \xi^{(\tau)}, \eta^{(\tau)}$ *сигнатурным пространством,* соответствующим рассматриваемой решетке, и обозначать его $R_{n,\tau}$. Суммой или разностью двух точек такого пространства мы будем, как раньше, считать точку его, каждая из координат которой есть соответственно сумма или разность соответствующих координат этих двух точек, а произведением — точку, первые σ координат которой суть также просто произведения соответствующих координат перемножаемых точек, координаты же, соответствующие каждой паре комплексно сопряженных координат, так получаются из координат соответствующих пар обеих точек, как при умножении комплексных чисел. При таком определении сумме, разности, произведению и частному двух точек соответственного сигнатурного сечения K_n будет соответствовать сумма, разность, произведение и частное соответственных точек сигнатурного пространства $R_{n,\tau}$, и обратно. Решетке сечения будет, очевидно, соответствовать обыкновенная вещественная решетка точек в $R_{n,\tau}$. Совокупности всех вообще точек всех решеток в K_n, повторяющихся умножением и лежащих в данном сигнатурном сечении, будет в $R_{n,\tau}$ соответствовать некоторая n-мерная дискретная система $W_{n,\tau}$ — уже не решетка, а именно система всех точек $R_{n,\tau}$, являющихся точками пересечения поверхностей

$$\zeta^{(1)} + \zeta^{(2)} + \ldots + \zeta^{(\sigma)} + 2\xi^{(1)} + 2\xi^{(2)} + \ldots + 2\xi^{(\tau)} = a_1,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\zeta^{(1)}\zeta^{(2)} \ldots \zeta^{(\sigma)}(\xi^{(1)2} + \eta^{(1)2})\,(\xi^{(2)2} + \eta^{(2)2}) \ldots (\xi^{(\tau)2} + \eta^{(\tau)2}) = a_n,$$

где $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — целые рациональные коэфициенты тех уравнений (1), которым удовлетворяют координаты этих точек.

Теорема II. *В любой $W_{n,\tau}$ имеется бесконечно много различных неприводимых n-мерных максимальных решеток.*

Я не буду подробно доказывать эту теорему, намечу только идею доказательства. Можно показать, что система $W_{n,\tau}$ чем дальше от начала, тем гуще, в том смысле, что если увеличивать радиус r шара в $R_{n,\tau}$ с центром в начале, то отношение числа лежащих в нем точек $W_{n,\tau}$ к его

объему будет расти до бесконечности, причем чем n больше, тем быстрее. Но любая приводимая точка из $W_{n,\tau}$ есть сумма точек систем $W_{\bar{n},\bar{\tau}}$ низших измерений $\bar{n}$, построенных на частных комплексах осей $R_{n,\tau}$. Соединяя оба эти обстоятельства, мы видим, что большинство точек $W_{n,\tau}$, лежащих в шаре большого радиуса r, суть точки неприводимые, причем густота их в вышеуказанном смысле также растет с увеличением радиуса r. Обозначим систему этих неприводимых точек через $W^*_{n,\tau}$. Возьмем в $W^*_{n,\tau}$ какую-нибудь точку ω_1; построенная на ней максимальная решетка O_1 будет неприводима. Но так как густота системы $W^*_{n,\tau}$ при увеличении r растет, то в $W^*_{n,\tau}$ имеются точки, не принадлежащие решетке O_1, густота которой постоянна. Пусть ω_2 — такая точка; построим на ней максимальную неприводимую решетку O_2; она будет отличаться от O_1, и т. д.

§ 3. О максимальных подрешетках неприводимой максимальной решетки. Разобьем все n осей пространства K_n на ν комплексов, не имеющих совпадающих осей, по одинаковому числу δ осей в каждом, так что $\nu\delta = n$, и приравняем в каждом из комплексов координаты между собою. Так получится система уравнений, определяющая ν-мерное линейное подпространство пространства K_n, которое мы будем называть ν-мерной биссектрисой осей K_n. Если n — простое число, то K_n имеет только одну 1-мерную биссектрису $x' = x'' = \ldots = x^{(n)}$, если же n не простое, то имеются еще другие биссектрисы, выше чем одного измерения, соответствующие различным разбиениям всех n осей K_n на комплексы по одинаковому числу осей в каждом. Если для такого разбиения полагать координаты каждого отдельного из таких комплексов равными между собою, а координаты всех остальных комплексов этого разбиения равными нулю, то в ν-мерном пространстве соответственной биссектрисы получится ν одномерных прямых, которые, как легко видеть, ортогональны друг другу. Мы будем называть их осями соответствующей биссектрисы.

Если n-мерная максимальная решетка в K_n неприводима, т. е. не имеет точек, являющихся делителями нуля, то она в силу теоремы I имеет неприводимое уравнение (1), и обратно; поэтому, если ω — некоторая точка такой решетки O, не общего положения, т. е. имеющая некоторые равные друг другу координаты, то все координаты ω распадаются на ν комплексов по одинаковому числу δ координат, координаты каждого из которых одинаковы между собою, тогда как координаты в различных комплексах различны. Это происходит потому, что если уравнение, получаемое рациональным преобразованием Чирнгаузена из неприводимого уравнения, приводимо, то оно есть степень неприводимого уравнения. Таким образом любая точка неприводимой максимальной решетки есть или точка общего положения или точка некоторой биссектрисы.

Замечание. Высказанная сейчас теорема также может быть доказана чисто геометрически, без привлечения теории уравнений.

Если подрешетка O_1 максимальной n-мерной решетки O в K_n — низшего измерения ν и все же повторяется сама в себе умножением в K_n, причем никакая ее центрировка уже не имеет этого свойства, то она называется *максимальной подрешеткой* максимальной решетки O.

Теорема III. *Максимальная подрешетка O_1 измерения ν неприводимой n-мерной максимальной решетки O есть ν-мерная совокуп-*

ность всех точек решетки O, лежащих в некоторой ν-мерной биссектрисе, и обратно. Такая подрешетка O_1 повторяется умножением также в пространстве самой этой биссектрисы, если в нем за оси принять оси этой биссектрисы и за максимальную единицу на них принять $\sqrt{\delta}$, где $\delta = \frac{n}{\nu}$, причем она будет в этих осях также максимальной.

Пусть ω_1 — некоторая точка подрешетки O_1, имеющая наибольшее число различных координат в K_n. Не все координаты ее различны, так как иначе она была бы общего в K_n положения и O_1 была бы n-мерна. Рассмотрим любую другую точку ω_2 решетки O_1; у нее должны быть равны друг другу те координаты, которые равны друг другу у ω_1, так как иначе у точки $k\omega_1 + \omega_2$ решетки O_1, где k — очень большое целое рациональное число, было бы еще больше не равных друг другу координат, чем у ω_1, ибо координаты того комплекса, в котором они равны у ω_1, но не равны у ω_2, стали бы неравны, а координаты разных комплексов $k\omega_1$ остались бы после прибавления ω_2 к $k\omega_1$ неравными, в силу того, что их разности были бы по абсолютной величине больше любой разности координат ω_2. Итак, все точки подрешетки O_1 лежат в биссектрисе, определяемой точкой ω_1. Если биссектриса эта ν-мерна, то, как легко видеть, степени точки ω_1 лежат в ней также ν-мерно. Рассмотрим совокупность всех точек n-мерной максимальной решетки O, которые лежат в этой биссектрисе; эта совокупность представляет собою, как легко видеть переходя в сигнатурное пространство, ν-мерную подрешетку решетки O. Эта ν-мерная подрешетка, очевидно, повторяется умножением, так как, с одной стороны, произведение любых двух ее точек есть опять точка решетки O, а с другой стороны, произведение любых двух точек некоторой биссектрисы, очевидно, лежит в этой же биссектрисе. Если O_1 максимальна, то она, следовательно, совпадает с этой решеткой. Последнее утверждение теоремы следует из того, что в осях биссектрисы, если на них взять за масштабную единицу $\sqrt{\delta}$, решетка O_1 будет совокупностью всех целых точек некоторого алгебраического поля ν-го порядка.

§ 4. Группа Галуа n-мерной решетки O, повторяющейся умножением. Мы будем называть *осеподстановкой* всякий поворот (ортогональное преобразование) пространства K_n вокруг начала, при котором совмещается с собою совокупность положительных координатных полуосей K_n. Осеподстановку, после которой решетка O совмещается с собою, мы будем называть *осеподстановкой этой решетки в себя*. Легко видеть, что неприводимая n-мерная решетка не может иметь больше чем n осеподстановок в себя. Действительно, пусть ω', ω'', ..., $\omega^{(n)}$ — координаты какой-нибудь точки общего положения этой решетки; тогда координатами тех точек, в которые эта точка перейдет при осеподстановках, будут те же числа, но в другом порядке. Никакие две различные подстановки не могут привести эту точку в одно и то же место, так как она — общего положения и, следовательно, не имеет одинаковых координат, а разные осеподстановки переставляют на новые места по крайней мере две оси. Если бы осеподстановок, преобразующих данную решетку в себя, было больше чем n, то существовали бы две различные точки в этой решетке, имеющие одинаковые, например, i-е координаты; но тогда разность этих точек, будучи отлична от начала, имела бы в качестве i-й

координаты нуль, т. е. была бы делителем нуля, и решетка не могла бы быть неприводимой. Неприводимую максимальную решетку, которая имеет ровно n осеподстановок в себя, мы будем называть *нормальной.*

Теорема IV. *Всякая неприводимая максимальная n-мерная решетка* A *есть либо нормальная решетка, либо максимальная подрешетка некоторой нормальной решетки.*

Для доказательства построим сначала некоторую вспомогательную $n!$-мерную решетку C следующим образом. Выпишем рядом колонки номеров 1, 2, ..., n координат точек A во всех возможных $n!$ расположениях и рассмотрим получившуюся прямоугольную матрицу этих номеров:

$$(*)\qquad \begin{matrix} 1 & 1 & \dots & n \\ 2 & 2 & \dots & n-1 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ n-1 & n & \dots & 2 \\ n & n-1 & \dots & 1. \end{matrix}$$

Каждая из ее строчек будет характеризовать некоторую свою n-мерную биссектрису пространства $K_{n!}$. Эта матрица (*) задает, таким образом, n вполне определенных n-мерных биссектрис в $K_{n!}$. Рассмотрим в $K_{n!}$ точки, координатами которых будут строчки получившейся матрицы (*), выписанные по порядку для всех точек A. Так получатся в рассматриваемых n биссекториальных плоскостях $K_{n!}$ решетки $A_1, A_2, \dots, A_n$, подобные решетке A, но в $\sqrt{\frac{n!}{n}}$ раз линейно бо́льшие ее. Рассмотрим совокупность C* всех точек $K_{n!}$, которые получатся, если всеми возможными способами соединять при помощи сложения, вычитания и умножения все точки всех этих n решеток. Если $0', 0'', \dots, 0^{(n)}$ — координаты в K_n какой-нибудь точки A общего в K_n положения, то любая точка C* имеет своею первою координатою $\Phi(0', 0'', \dots, 0^{(n)})$, где Φ — некоторая целая рациональная функция от $0', 0'', \dots, 0^{(n)}$ (возможно с дробными коэфициентами, так как координаты некоторых точек A могут выражаться через соответственные координаты выбранной в A точки 0 общего положения цело рационально с дробными коэфициентами), второю координатою — ту же функцию Φ, но от второго расположения $0', 0'', \dots, 0^{(n)}, 0^{(n-1)}$, соответствующего второй колонке (*), и т. д. Координаты любой точки C* суть, следовательно, в силу теоремы о симметрических функциях, корни уравнения $F(x) = 0$ $n!$-й степени со старшим коэфициентом 1 и рациональными коэфициентами. Но так как корни этого уравнения суть суммы, разности и произведения целых алгебраических чисел, то коэфициенты полинома F — целые рациональные. Координаты 0 либо вещественны либо распадаются на пары комплексно сопряженных, и, следовательно, независимо от выбора Φ, соответственные $n!\Phi$ будут также либо вещественны либо распадаться на пары комплексно сопряженных, причем комплексно сопряженными бу-

дут те Ф, которые получаются друг из друга перестановкой координат $\vartheta^{(i)}$ во всех комплексно сопряженных парах. Все точки C* лежат, следовательно, в соответственном $W_{n!,\tau}$, т. е. система точек C* дискретна. Но, например, точка $V = A_1\vartheta' + A_2\vartheta'' + \ldots + A_n\vartheta^{(n)}$ с целыми рациональными и „лексикографически“ выбранными коэфициентами A_i есть точка C* общего в $R_{n!,\tau}$ положения, так как $n!$ разным перестановкам $\vartheta^{(i)}$ будут соответствовать $n!$ разных и неравных значений V; следовательно, система C* $n!$-мерна. В силу самого образования системы C* она повторяется сложением и вычитанием, т. е. есть $n!$-мерная решетка, и повторяется умножением в $K_{n!}$. Обозначим через C максимальную для C* решетку, если бы сама C* не была максимальна (мне пока не удалось выяснить, максимальна ли C*). Решетка C* имеет $n!$ осеподстановок $K_{n!}$, совмещающих ее с собою, а именно те $n!$ осеподстановок $K_{n!}$, которые соответствуют $n!$ подстановкам столбцов матрицы (*), вызываемым всеми $n!$ перестановками ее строчек, так как каждая из этих $n!$ осеподстановок $K_{n!}$ только переставляет решетки $A_1, A_2, \ldots, A_n$, при помощи которых построена C*, между собою. Очевидно, что эти $n!$ осеподстановок $K_{n!}$ совмещают и C саму с собою.

Пусть теперь $B_1, B_2, \ldots, B_k$ — неприводимые части, прямой суммой которых является максимальная решетка C, и $K_{m_1}, K_{m_2}, \ldots, K_{m_k}$ — координатные подпространства, в которых они лежат. Покажем, что все неприводимые части — не только одного измерения, но даже просто одинаковы. Для этого возьмем какую-нибудь осеподстановку S решетки C в себя, которая совмещает какую-нибудь координату K_{m_1} с какой-нибудь координатой некоторой другой K_{m_i}; среди $n!$ наших осеподстановок будет иметься такая осеподстановка, так как существует осеподстановка, которая любую из координат $K_{n!}$ ставит на любое из $n!$ мест, ибо иначе среди наших осеподстановок имелись бы две разные, которые одну и ту же координату ставили бы на одно и то же место, а это противоречит самому образованию этих $n!$ осеподстановок перестановкой строк матрицы (*). В любой точке ω решетки C либо участвует какой-нибудь вектор неприводимой части B_i, и тогда все координаты этой точки, соответствующие K_{m_i}, отличны от нуля, так как в B_i всякая точка, отличная от нуля, не имеет ни одной координаты в K_{m_i}, равной нулю, либо в точке ω не участвует вектор B_i, и тогда все ее координаты, соответствующие K_{m_i}, равны нулю. Предположим, что $m_1 \leqslant m_2 \leqslant \ldots \leqslant m_k$; тогда подстановка S дает из точки B_1 какую-то точку C, одна из координат которой есть координата K_{m_1} и которая имеет $m_1 \leqslant m_i$ $(m_1 \neq 0)$ координат; но это в силу сказанного выше о точках C возможно лишь если $m_i = m_1$ и если все координаты точки B_1 после осеподстановки S превращаются в координаты K_{m_i}. Кроме того, мы видим, что B_1 после этой осеподстановки просто совмещается с B_i, так как B_i есть совокупность всех точек C, лежащих в K_{m_i}. Мы видим, таким образом, что все B_i одного измерения m и одинаковы.

Это рассуждение показывает также, что B_1 имеет m осеподстановок в себя, так как если координаты K_{m_1} суть 1, 2, ..., m, то всякая из

рассматриваемых $n!$ осеподстановок C в себя, которая переставляет первую координату на первое, второе, ..., m-е место (а такие S в силу сказанного выше будут иметься), совмещает B_1 с собою, переставляя ее оси. Всякая из неприводимых частей B_1, таким образом, нормальна.

Наконец, нетрудно видеть, что A_1 вставлена в одно из B_i, в том смысле, что она есть максимальная подрешетка одного из B_i, а следовательно, B, рассматриваемая в собственном m-мерном пространстве K_m, есть нормальная решетка, максимальной подрешеткой которой является A. Действительно, пусть θ — точка C, соответствующая точке A общего положения. Точка θ, как и всякая точка C, имеет вид $\theta = \theta_1 + \theta_2 + \ldots + \theta_k$, где θ_i — точки в соответственных неприводимых частях. Каждая из точек θ_i имеет среди своих координат все различные координаты точки θ, так как иначе A не могла бы быть неприводимой. A, следовательно, есть подрешетка B_i такого же или низшего, чем B_i, измерения, повторяющаяся умножением, и ввиду своей максимальности — максимальная такая решетка. Ч. и тр. д.

Мы будем группу G всех m осеподстановок B в себя называть *группой Галуа* нормальной решетки B, а также группой Галуа решетки A, повторяющейся умножением. Нормальную решетку B мы будем называть *нормой* A. В случае, когда решетка A не максимальна и не неприводима, ничего во всем рассуждении не меняется, кроме самого конца; а именно, если решетка A, повторяющаяся умножением, не неприводима, то она может не быть подрешеткой нормальной решетки B. В случае, когда A неприводима, число m измерений B есть кратное числа n измерений A, $m = nd$, если же решетка A не неприводима, то m может быть не кратно и даже меньше n.

§ 5. Подгруппы группы G и максимальные подрешетки нормальной решетки B. Пусть H — некоторая подгруппа группы G, порядка δ, так что $m = \nu\delta$, где ν — целое. Рассмотрим, в какие оси переходит первая ось K_m при помощи всех подстановок H. Ввиду того что группа G перестановок осей $1, 2, \ldots, m$ пространства K_m правильная, это будут различные δ осей $1, 2, \ldots, \delta$. Следовательно, вторая ось при помощи подстановок H переходит также лишь в эти же первую, вторую, ..., δ-ю оси. Таким образом эти оси переходят при помощи перестановок H только друг в друга. Аналогично получим, если исходить от $(\delta+1)$-й оси в δ расположениях номеров осей K_m, соответствующих подгруппе H, тоже квадрат со стороною δ, составленный из номеров δ следующих осей, переводимых подгруппой H только друг в друга, и т. д.

$$G\left\{\begin{array}{l} H\left\{\begin{array}{cccc} \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & \delta \\ 2 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 3 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \delta & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \delta+1 & \ldots & 2\delta \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} & \begin{matrix} \ldots \\ \ldots \\ \ldots \\ \ldots \\ \ldots \end{matrix} & \begin{pmatrix} (\nu-1)\delta+1 & \ldots & m \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \end{array}\right. \\ \delta+1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ m \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} m\ (=\nu\delta).$$

Очевидно, что совокупность всех осеподстановок подгруппы H оставляет на месте те и только те точки пространства K_m, которые соответствуют ν-мерной биссектрисе K_m, получаемой, если приравнять между собою координаты, соответствующие отдельным квадратам H.

Теорема V. *Всякой подгруппе H группы G индекса ν соответствует ν-мерная максимальная подрешетка решетки* B, *и обратно.*

Действительно, если мы возьмем любую точку B, сделаем над ней все δ осеподстановок H и сложим все δ получившихся точек, то получится точка, лежащая в биссекториальной плоскости, соответствующей подгруппе H. Если мы это сделаем для всякой точки B, то мы получим ν-мерную решетку в этой биссекториальной плоскости, так как можно взять такие точки B, чтобы суммы координат в отдельных комплексах были все различны и не равны нулю, т. е. чтобы получалась точка общего в соответственной биссектрисе положения. Итак, всякой подгруппе H группы G соответствует ν-мерная подрешетка решетки B, лежащая в ν-мерной биссектрисе, а следовательно, и максимальная такая подрешетка.

Предположим теперь, что, обратно, в нормальной решетке B есть ν-мерная максимальная подрешетка A, и пусть α — точка общего в ней положения. Пусть H — подгруппа всех осеподстановок G, оставляющих α на месте. Число подстановок в H не больше чем кратность δ координат α, так как, например, первая координата точки α может принимать после этих осеподстановок не больше чем δ положений, а именно тех, на которых координаты α равны ее первой координате, а в G нет различных осеподстановок, которые оставляли бы некоторую координату на месте. С другой стороны, число подстановок в H и не меньше чем δ, так как иначе, если подвергнуть точку α всем подстановкам группы G, мы получили бы больше чем ν различных точек, и, например, первые координаты этих точек должны были бы иметь больше чем ν различных значений, а этого быть не может, так как у α лишь ν различных координат. Всякая подстановка H, следовательно, лишь переставляет координаты внутри комплексов, координаты которых у α равны между собою. Подрешетка A, следовательно, принадлежит подгруппе H в вышеуказанном смысле.

§ 6. Рациональные соотношения между корнями. С первого взгляда нигде в так построенной теории Галуа не появляются рациональные соотношения между корнями, с которых начинается большинство других изложений. Однако они и тут, конечно, имеются и играют весьма существенную роль. Действительно, точки, которые в решетке C суть делители нуля, если решетка эта приводима, как раз и суть все целые рациональные соотношения $\Phi(x', x'', \ldots, x^{(n)}) = 0$ между корнями, нарушаемые некоторыми из $n!$ подстановок, причем расположены они, оказывается, весьма просто; но изучение их расположения я оставлю до другого раза.

НЕКОТОРЫЕ ТЕОРЕМЫ О БЕСКОНЕЧНЫХ ГРУППАХ.

А. П. Дицман (Москва).

В настоящей статье устанавливается достаточное условие, при котором множество некоторых элементов группы порождает подгруппу конечного порядка. Пользуясь этим результатом, легко получаем некоторые критерии конечности числа систем разложения группы по простому и двойному модулям. Далее устанавливается необходимое и достаточное условие, при котором p-группа (определение см. ниже) имеет отличный от единицы центр.

Классы сопряженных элементов группы будем в дальнейшем называть кратко классами группы; класс, заключающий конечное число элементов, будем называть конечным классом.

Пусть имеем произведение g некоторых элементов группы:

$$g = a_1 \dots a_{i-1} a_i \dots a_{k-1} a_k a_{k+1} \dots a_l. \tag{1}$$

Представим g в виде

$$g = a_1 \dots a_{i-1} a_k a_i^* \dots a_{k-1}^* a_{k+1} \dots a_l \tag{2}$$

где

$$a_i^* = a_k^{-1} a_i a_k, \quad \dots, \quad a_{k-1}^* = a_k^{-1} a_{k-1} a_k;$$

в этом случае будем говорить, что произведение (2) получается из произведения (1) путем перемещения элемента a_k на место i.

Пусть M — множество элементов, порождающих группу $\mathfrak{G}$. Тогда каждый элемент группы $\mathfrak{G}$ есть произведение конечного числа степеней некоторых элементов множества M. Очевидно, всякое непустое множество элементов группы $\mathfrak{G}$ порождает подгруппу.

Теорема I. *Пусть $a_1, a_2, \dots, a_k$ — элементы класса A порядка k группы $\mathfrak{G}$ и β — порядок элемента a_1. Если $\mathfrak{Q}$ есть подгруппа, порождаемая всеми элементами класса A, и q_1 — элемент $\mathfrak{Q}$, то*

$$q_1 = a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} \dots a_k^{\alpha_k},$$

где

$$0 \leqslant \alpha_i < \beta, \quad i = 1, 2, \dots, k.$$

Доказательство. Очевидно, имеем

$$a_i^{\beta} = 1, \quad i = 1, 2, \dots, k. \tag{3}$$

Всякий элемент q_j подгруппы $\mathfrak{Q}$ можно представить в виде произведения конечного числа степеней элементов класса A. Пользуясь (3),

заключаем, что для всякого элемента q_j подгруппы $\mathfrak{Q}$ существует такое наименьшее положительное целое число $m = m(q_j)$, что q_j можно представить в виде произведения m элементов:

$$q_j = a_{i1} a_{i2} \cdot \ldots \cdot a_{im} \tag{4}$$

класса A. Если среди элементов $a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{im}$ имеется α элементов, равных a_s, то будем говорить, что элемент a_s встречается в произведении (4) α раз.

Представление элемента q_j в виде произведения m элементов класса A будем называть нормальным представлением элемента q_j, число m — длиною элемента q_j. Два нормальных представления элемента q_j будем считать различными, если они отличаются либо множителями либо порядком следования множителей.

Рассмотрим множество Π всех нормальных представлений элемента q_j, т. е. множество различных произведений вида (4). Очевидно, Π содержит конечное число различных таких произведений.

Пусть a_s — элемент класса A; очевидно, в каждом из произведений множества Π элемент a_s встречается не более m раз. Следовательно, паре элементов a_s и q_j можно сопоставить число α_{sj}, удовлетворяющее условиям:

1) Среди произведений множества Π имеется по крайней мере одно произведение, в котором элемент a_s встречается α_{sj} раз.

2) В каждом произведении множества Π элемент a_s встречается не более α_{sj} раз.

Очевидно, $0 \leqslant \alpha_{sj} \leqslant m$.

В частности, если $\alpha_{sj} = m$, то $q_j = a_s^{\alpha_{sj}}$.

Заметим теперь, что при $\alpha_{sj} < m$ имеется нормальное представление элемента q_j вида

$$q_j = a_s^{\alpha_{sj}} q_{j+1}, \tag{5}$$

где q_{j+1} есть произведение $m - \alpha_{sj}$ элементов класса A; при этом $m - \alpha_{sj}$ есть длина элемента q_{j+1} и $\alpha_{s,\,j+1} = 0$. Кроме того, для любого элемента a_t класса A имеем $\alpha_{tj} \geqslant \alpha_{t,\,j+1}$, в частности, если $\alpha_{tj} = 0$, то и $\alpha_{t,\,j+1} = 0$.

Действительно, рассмотрим нормальное представление элемента q_j, в котором a_s встречается α_{sj} раз; путем последовательного перемещения элементов a_s этого произведения на первое место, очевидно, получим нормальное представление элемента q_j вида (5). Длина элемента q_{j+1} равна $m - \alpha_{sj}$, так как произведение (5) есть нормальное представление элемента q_j. Далее, $\alpha_{s,\,j+1} = 0$, так как, предполагая $\alpha_{s,\,j+1} > 0$, заключаем, что имеется нормальное представление элемента q_j, в котором a_s встречается более α_{sj} раз, что противоречит определению числа α_{sj}. Наконец, $\alpha_{tj} \geqslant \alpha_{t,\,j+1}$, так как предположение $\alpha_{t,\,j+1} > \alpha_{tj}$ противоречит определению числа α_{tj}.

Пусть q_1 — какой-либо элемент подгруппы $\mathfrak{Q}$ длины m_1. Если $\alpha_{11} = m_1$, то $q_1 = a_1^{\alpha_{11}}$. Если же $\alpha_{11} < m_1$, то, пользуясь приведенным выше замечанием, заключаем, что для q_1 существует нормальное представление вида

$$q_1 = a^{\alpha_{11}} q_2,$$

причем $\alpha_{12} = 0$.

Рассуждая аналогично для q_2 и т. д., предположим, что мы уже получили нормальное представление элемента q_1 вида

(6) $$q_1 = a_1^{\alpha_{11}} a_2^{\alpha_{22}} \dots a_{r-1}^{\alpha_{r-1,r-1}} q_r, \quad 2 \leqslant r < k,$$

причем

$$\alpha_{1r} = 0, \quad \alpha_{2r} = 0, \quad \dots, \quad \alpha_{r-1,r} = 0$$

и

$$\alpha_{11} + \alpha_{22} + \dots + \alpha_{r-1,r-1} < m_1.$$

Тогда, если $\alpha_{11} + \alpha_{22} + \dots + \alpha_{r-1,r-1} + \alpha_{rr} = m_1$, то, очевидно, имеем

$$q_1 = a_1^{\alpha_{11}} a_2^{\alpha_{22}} \dots a_r^{\alpha_{rr}}.$$

Если же $\alpha_{11} + \alpha_{22} + \dots + \alpha_{r-1,r-1} + \alpha_{rr} < m$, то для q_r существует нормальное представление

(7) $$q_r = a_r^{\alpha_{rr}} q_{r+1},$$

причем

$$\alpha_{1,r+1} = 0, \quad \alpha_{2,r+1} = 0, \quad \dots, \quad \alpha_{r,r+1} = 0.$$

Из (6) и (7) получаем для q_1 нормальное представление

$$q_1 = a_1^{\alpha_{11}} a_2^{\alpha_{22}} \dots a_r^{\alpha_{rr}} q_{r+1};$$

при этом

$$\alpha_{1,r+1} = 0, \quad \alpha_{2,r+1} = 0, \quad \dots, \quad \alpha_{r,r+1} = 0$$

и

$$\alpha_{11} + \alpha_{22} + \dots + \alpha_{rr} < m_1.$$

Таким образом убеждаемся, что для элемента q_1 существует нормальное представление вида

$$q_1 = a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} \dots a_k^{\alpha_k},$$

причем

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k = m_1$$

и

$$0 \leqslant \alpha_i < \beta, \quad i = 1, 2, \dots, k.$$

Теорема I доказана.

Замечая, что множество элементов, образующих инвариантный комплекс группы $\mathfrak{G}$, порождает инвариантную подгруппу, из теоремы I получаем:

Следствие [1]). *Если A — конечный класс группы $\mathfrak{G}$, заключающий элементы конечного порядка, то все элементы класса A порождают инвариантную подгруппу конечного порядка.*

Лемма I. *Пусть M — множество элементов, порождающих группу $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{F}$ — подгруппы группы $\mathfrak{G}$. Если каждый элемент M входит в одну из подгрупп $\mathfrak{H}$ или $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}\mathfrak{F} = \mathfrak{F}\mathfrak{H}$, то $\mathfrak{H}\mathfrak{F} = \mathfrak{G}$.*

Действительно, по условию леммы, $\mathfrak{H}\mathfrak{F}$ есть группа, содержащая все элементы множества M, т. е. $\mathfrak{H}\mathfrak{F} = \mathfrak{G}$.

Из вышеизложенных результатов легко получаются различные критерии конечности числа систем разложения некоторой группы $\mathfrak{G}$ по простому и двойному модулям, например:

---

[1]) А. П. Дицман, О p-группах, Доклады Академии наук СССР, т. XV (1937), № 2, стр. 71—76.

Теорема II. *Если M — множество элементов, порождающих группу $\mathfrak{G}$, и $\mathfrak{K}$ — инвариантный комплекс, состоящий из конечного числа элементов конечных порядков группы $\mathfrak{G}$, то подгруппа, порождаемая всеми элементами множества M, не принадлежащими комплексу $\mathfrak{K}$, есть подгруппа конечного индекса группы $\mathfrak{G}$.*

Из леммы I и следствия теоремы I тривиально следует также обобщение теоремы II, полученное В. К. Туркиным и П. Е. Дюбюком [2]), которое можно формулировать следующим образом:

Теорема III. *Пусть элементы группы $\mathfrak{H}$ и элемент a порождают группу $\mathfrak{G}$. Если a есть элемент конечного порядка, принадлежащий конечному классу A группы $\mathfrak{G}$, и*

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_1\mathfrak{H}_2,$$

где $\mathfrak{H}_1$ и $\mathfrak{H}_2$ — подгруппы, то разложение группы $\mathfrak{G}$ по двойному модулю $(\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2)$ имеет конечное число систем.

Действительно, обозначим через $\mathfrak{F}$ подгруппу, порождаемую всеми элементами класса A. Согласно следствию теоремы I, $\mathfrak{F}$ есть инвариантная подгруппа конечного порядка. По лемме I

$$\mathfrak{H}_1\mathfrak{F}\mathfrak{H}_2 = \mathfrak{F}\mathfrak{H} = \mathfrak{H}\mathfrak{F} = \mathfrak{G},$$

т. е.

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{H}_1 f_1 \mathfrak{H}_2 + \mathfrak{H}_1 f_2 \mathfrak{H}_2 + \ldots + \mathfrak{H}_1 f_k \mathfrak{H}_2,$$

где $f_1, f_2, \ldots, f_k$ — различные элементы $\mathfrak{F}$, ч. и тр. д.

Группа, порядок каждого элемента которой есть некоторая степень простого числа p, называется p-группой. Очевидно, порядок конечной p-группы есть некоторая степень числа p. Известно, что p-группа конечного порядка имеет отличный от единицы центр.

Рассмотрим необходимое и достаточное условие, при котором p-группа имеет отличный от единицы центр. Предварительно докажем следующее предложение:

Лемма II. *Если $\mathfrak{R}$ — подгруппа конечного индекса некоторой p-группы $\mathfrak{P}$, то индекс подгруппы $\mathfrak{R}$ есть степень числа p.*

Действительно, $\mathfrak{P}$, очевидно, содержит конечное число различных сопряженных с $\mathfrak{R}$ подгрупп. По теореме Пуанкаре [3]) пересечение двух и, следовательно, конечного числа подгрупп, каждая из которых есть подгруппа конечного индекса группы $\mathfrak{P}$, представляет подгруппу конечного индекса группы $\mathfrak{P}$.

Обозначим через $\mathfrak{D}$ пересечение всех подгрупп, сопряженных с $\mathfrak{R}$, тогда $\mathfrak{D}$ есть инвариантная подгруппа конечного индекса группы $\mathfrak{P}$. Очевидно, индексы связаны соотношением

$$(\mathfrak{P}/\mathfrak{D};\ \mathfrak{R}/\mathfrak{D}) = (\mathfrak{P};\ \mathfrak{R}). \tag{8}$$

---

[2]) W. Turkin et P. Dubuque, Sur les groupes infinis, C. R. Acad. Sci. Paris, т. 205 (1937), стр. 435—437. В начале своей заметки авторы делают излишнее ограничение, предполагая, что каждый элемент группы выражается в виде произведения конечного числа производящих элементов группы.

[3]) H. Poincaré, Journal des mathématiques (4), т. 3 (1887), стр. 409. См. также О. Ю. Шмидт, Абстрактная теория групп, стр. 33, ГТТИ, 1933.

Факторгруппа $\mathfrak{P}/\mathfrak{D}$ есть группа конечного порядка; легко видеть, что порядок каждого ее элемента есть степень числа p, т. е. факторгруппа $\mathfrak{P}/\mathfrak{D}$ есть конечная p-группа. Вследствие (8) индекс $\mathfrak{R}$ есть степень числа p, ч. и тр. д.

Теорема IV [1]). *p-группа имеет отличный от единицы центр, если она содержит по крайней мере один отличный от единицы конечный класс.*

Доказательство. Пусть A — конечный класс p-группы $\mathfrak{P}$. Элементы класса A, по следствию теоремы I, порождают нормальный делитель $\mathfrak{A}$ конечного порядка p^n группы $\mathfrak{P}$. Обозначим через a какой-либо элемент нормального делителя $\mathfrak{A}$. Элемент a принадлежит к конечному классу группы $\mathfrak{P}$, так как множество всех элементов нормального делителя $\mathfrak{A}$ есть совокупность некоторых конечных классов группы $\mathfrak{P}$. Нормализатор $\mathfrak{R}$ элемента a в группе $\mathfrak{P}$ есть, следовательно, подгруппа конечного индекса группы $\mathfrak{P}$. По лемме II индекс подгруппы $\mathfrak{R}$ есть степень числа p. Следовательно, порядок класса сопряженных с a элементов группы $\mathfrak{P}$ есть степень числа p.

Пусть нормальный делитель $\mathfrak{A}$ распадается на k классов группы $\mathfrak{P}$, причем порядки этих классов суть числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$; тогда

$$p^n = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_k.$$

Числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ суть степени числа p; предполагая, что через α_1 обозначен порядок класса, составленного единицей, следовательно $\alpha_1 = 1$, заключаем, что кроме единицы группа $\mathfrak{P}$ должна иметь еще и другие инвариантные элементы, что и доказывает теорему.

Из теоремы IV следует, что p-группа, центр которой равен единице, не содержит ни одного отличного от единицы конечного класса.

Пример такой p-группы, центр которой равен единице, найден А. Г. Курошем.

SUR LA MÉTHODE DES MULTIPLICATEURS DE LAGRANGE.

Par E. Żyliński (Lwów).

Soit D un domaine de l'espace $(x_1, x_2, \ldots, x_m; y_1, y_2, \ldots, y_n)$, dans lequel le déterminant fonctionnel

$$I(x_i; y_k) = \left| \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_k} \right| \quad (i, k = 1, 2, \ldots, n)$$

du système de n fonctions

$$\varphi_i(x_1, x_2, \ldots, x_m; y_1, y_2, \ldots, y_n) \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

est différent de 0.

Soit $F(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ une fonction des x_j qu'on obtient en substituant au lieu des y_k dans

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_m; y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

les solutions (en regard de ces variables) du système des équations

$$\varphi_i(x_j; y_k) = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Supposons la fonction $f(x_j; y_k)$ totalement différentiable envers ses $m + n$ variables, et soit Δ l'ensemble des points de D pour lesquels

$$\frac{\partial F}{\partial x_j} = 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, m).$$

L'ensemble Δ s'obtient en éliminant mn derivées

$$\alpha_{kj} = \frac{\partial y_k}{\partial x_j} \quad (k = 1, 2, \ldots, n; \; j = 1, 2, \ldots, m)$$

de $m + mn + n$ équations

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x_j} + \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\partial f}{\partial y_k} \dfrac{\partial y_k}{\partial x_j} = 0 & (j = 1, 2, \ldots, m), \\ \dfrac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} + \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\partial \varphi_i}{\partial y_k} \dfrac{\partial y_k}{\partial x_j} = 0 & (i = 1, 2, \ldots, n; \; j = 1, 2, \ldots, m), \\ \varphi_i(x_j; y_k) = 0 & (i = 1, 2, \ldots, n). \end{cases}$$

Le but de cette note est la démonstration rigoureuse du théorème, que l'ensemble Δ peut être obtenu également en éliminant n paramètres

$$\lambda_i \quad (i=1, 2, \ldots, n)$$

de $m+n+n$ équations

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x_j}+\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i\dfrac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}=0 & (j=1, 2, \ldots, m), \\ \dfrac{\partial f}{\partial y_k}+\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i\dfrac{\partial \varphi_i}{\partial y_k}=0 & (k=1, 2, \ldots, n), \\ \varphi(x_j;\ y_k)=0 & (i=1, 2, \ldots, n). \end{cases}$$

Pour la démonstration, il suffit de constater que pour tout point du domaine D satisfaisant aux conditions

$$\varphi_i(x_j;\ y_k)=0 \quad (i=1, 2, \ldots, n)$$

les deux systèmes linéaires inhomogènes

$$(1) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x_j}+\sum\limits_{k=1}^{n}\varkappa_{kj}\dfrac{\partial f}{\partial y_k}=0 & (j=1, 2, \ldots, m), \\ \dfrac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}+\sum\limits_{k=1}^{n}\varkappa_{kj}\dfrac{\partial \varphi_i}{\partial y_k}=0 & (i=1, 2, \ldots, n;\ j=1, 2, \ldots, m), \end{cases}$$

$$(2) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x_j}+\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i\dfrac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}=0 & (j=1, 2, \ldots, m), \\ \dfrac{\partial f}{\partial y_k}+\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i\dfrac{\partial \varphi_i}{\partial y_k}=0 & (k=1, 2, \ldots, n) \end{cases}$$

sont en même temps compatibles ou incompatibles, le système (1) par rapport à mn inconnues $\varkappa_{kj}$, le système (2) par rapport à n inconnues λ_i [1]).

En appliquant à ces systèmes la condition bien connue de compatibilité de Rouché-Capelli, nous sommes conduits à la démonstration du lemme suivant: le déterminant du tableau carré I (de l'ordre n) étant différent de 0, les deux tableaux rectangulaires de la forme suivante:

---

[1]) La démonstration que pour chaque point de Δ le système (2) est compatible dans le cas $j=2$, $k=2$ se trouve p. ex. chez R. Courant, Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung (1931), Bd. II, Kap. III, § 6, S. 157—161.

$$T_1 = \begin{pmatrix} a_1 & \alpha & 0 & \vdots & 0 \\ a_2 & 0 & \alpha & \vdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_m & 0 & 0 & \vdots & \alpha \\ \beta_1 & I & 0 & \vdots & 0 \\ \beta_2 & 0 & I & \vdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \beta_m & 0 & 0 & \vdots & I \end{pmatrix}$$

$$T_2 = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_m & \alpha \\ \beta_1 & \beta_2 & \ldots & \beta_m & I \end{pmatrix}$$

possèdent simultanément ou bien le rang maximal, ou bien le rang maximal moins un [2]).

En effet, à cause de $|I| \neq 0$, le rang de T_2 est égal à n ou à $n+1$ et semblablement par suite de

$$(3) \qquad \underbrace{\begin{vmatrix} I & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & I & \vdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \vdots & I \end{vmatrix}}_{m} = |I|^m \neq 0$$

[2]) Le tableau T_1 a la forme du tableau des coefficients du système (1). Le tableau T_2 ne diffère du tableau des coefficients du système (2) que par transposition des lignes et des colonnes.

le rang du tableau T_1 est mn ou $mn+1$. Pour que le rang de T_1 soit égal à mn, il faut et il suffit — comme on sait bien — que tous les mineurs de T_1 de l'ordre $mn+1$ obtenus de (3) par „bordage“ au moyen d'une nouvelle ligne et d'une nouvelle colonne (nous les appellerons ici mineurs „caractéristiques“ de T_1) soient égaux à 0.

De même, pour que le rang du tableau T_2 soit égal à n, il faut et il suffit que tous les mineurs de T_2 de l'ordre $n+1$ obtenus de $|I|$ par adjonction d'une nouvelle ligne et d'une nouvelle colonne (mineurs caractéristiques de T_2) soient égaux à 0.

Mais chaque mineur caractéristique de T_1 est égal, à un facteur différent de 0 près, à un mineur caractéristique de T_2 et réciproquement.

Nous avons, en effet, en appliquant la règle de décomposition de Laplace p. ex.

$$\begin{vmatrix} a_2 & 0 & \alpha & \vdots & 0 \\ \beta_1 & I & 0 & \vdots & 0 \\ \beta_2 & 0 & I & \vdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \beta_m & 0 & 0 & \vdots & I \end{vmatrix} =$$

$$= \pm \underbrace{\begin{vmatrix} I & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & I & \vdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \vdots & I \end{vmatrix}}_{m-1} \cdot \begin{vmatrix} a_2 & \alpha \\ \beta_2 & I \end{vmatrix} =$$

$$= \pm |I|^{m-1} \begin{vmatrix} a_2 & \alpha \\ \beta_2 & I \end{vmatrix}.$$

et de même pour tout autre mineur caractéristique du tableau T_1 et T_2.

Donc, le lemme et le théorème sont démontrés complètement.

SUR UNE CLASSE DE SURFACES APPARENTÉES AUX SURFACES *R* ET AUX SURFACES DE JONAS.

Par E. Cartan (Paris).

1. Étant donné dans l'espace ordinaire un réseau et ses deux équations de Laplace, ponctuelle et tangentielle, il y a trois manières d'égaler deux à deux les invariants h, k; $\bar{h}$, $\bar{k}$ de ces deux équations, à savoir

(I) $$h = k, \quad \bar{h} = \bar{k};$$

(II) $$h = \bar{k}, \quad k = \bar{h};$$

(III) $$h = \bar{h}, \quad k = \bar{k}.$$

Les réseaux (I) sont les réseaux à invariants ponctuels et tangentiels égaux; les surfaces sur lesquelles on peut trouver un tel réseau sont les surfaces J ou *surfaces de Jonas*; on peut les caractériser par la possibilité de choisir les paramètres u et v des lignes asymptotiques, de manière à avoir $\beta_u = \gamma_v$, les fonctions β et γ étant les fonctions bien connues qui entrent dans l'expression $\frac{\beta\, du^3 + \gamma\, dv^3}{2\, du\, dv}$ de l'élément linéaire de Fubini [1]).

Les réseaux (II) sont les réseaux R caractérisés par la propriété que les tangentes aux deux familles de courbes du réseau engendrent des congruences W. Les surfaces sur lesquelles on peut tracer un tel réseau sont les surfaces R, ou surfaces projectivement déformables; les réseaux R sont les *réseaux conjugués de déformation projective des surfaces R*. Ces surfaces sont caractérisées par la relation $\beta_v = \gamma_u$, valable pour un choix convenable des paramètres des lignes asymptotiques [2]).

Les surfaces sur lesquelles on peut tracer un réseau (III) ont été peu considérées; on pourrait les appeler surfaces E, et réseaux E les réseaux correspondants. Sur les deux transformés de Laplace d'un réseau E les asymptotiques se correspondent, mais cette propriété ne suffit pas à caractériser ces réseaux.

2. On sait que les surfaces R dépendent de six fonctions arbitraires d'un argument, les caractéristiques du système différentiel qui les donne étant les lignes asymptotiques, qui en constituent deux familles doubles, et les deux familles de courbes du réseau R correspondant. Nous nous proposons de montrer que les surfaces J ont le même degré de généralité, les caractéristiques étant ici les deux familles de lignes asymptotiques, les

---

[1]) Voir G. Fubini-E. Čech, Geometria proiettiva differenziale I, Bologna, Zanichelli, 1926, p. 106.

[2]) G. Fubini-E. Čech, loc. cit., p. 107.

deux familles de courbes du réseau J et les deux familles du réseau conjugué harmonique du réseau J, qui est lui-même un réseau J. Quant aux surfaces E, elles ne dépendent que de cinq fonctions arbitraires d'un argument, les caractéristiques étant les deux familles de courbes du réseau E comptées deux fois et une cinquième famille de courbes liées aux courbes du réseau E par une relation géométrique simple.

I

3. Nous appliquerons la méthode du repère mobile [3]). A chaque point d'une surface attachons quatre *points analytiques* A_0, A_1, A_2, A_3, dont chacun est défini, par rapport à un système de référence fixe, par quatre coordonnées x_i, y_i, z_i, t_i $(i=0, 1, 2, 3)$; on a des relations de la forme

$$(1)\qquad \begin{cases} dA_0 = \omega_{00}A_0 + \omega_{01}A_1 + \omega_{02}A_2 + \omega_{03}A_3, \\ dA_1 = \omega_{10}A_0 + \omega_{11}A_1 + \omega_{12}A_2 + \omega_{13}A_3, \\ dA_2 = \omega_{20}A_0 + \omega_{21}A_1 + \omega_{22}A_2 + \omega_{23}A_3, \\ dA_3 = \omega_{30}A_0 + \omega_{31}A_1 + \omega_{32}A_2 + \omega_{33}A_3, \end{cases}$$

les coefficients ω_{ij} étant des formes différentielles assujetties aux relations de compatibilité (équations de structure)

$$(2)\qquad \omega'_{ij} = \sum_k [\omega_{ik}\omega_{kj}].$$

Ce même repère peut être envisagé d'un point de vue dualistique, en associant à chaque face du tétraèdre $A_0A_1A_2A_3$ un *plan analytique* défini par quatre coordonnées tangentielles u, v, w, s. Nous appelerons a_i le plan analytique opposé au sommet A_{3-i} et nous supposerons les coordonnées u_i, v_i, w_i, s_i choisies de manière à avoir

$$u_ix_j + v_iy_j + w_iz_j + s_it_j = \begin{cases} 1 & \text{pour } i+j=3, \\ 0 & \text{pour } i+j\neq 3. \end{cases}$$

En posant

$$da_i = \tilde{\omega}_{i0}a_0 + \tilde{\omega}_{i1}a_1 + \tilde{\omega}_{i2}a_2 + \tilde{\omega}_{i3}a_3,$$

on démontre facilement les relations

$$\tilde{\omega}_{ij} = -\omega_{3-j,\,3-i},$$

d'où

$$(3)\qquad \begin{cases} da_0 = -\omega_{33}a_0 - \omega_{23}a_1 - \omega_{13}a_2 - \omega_{03}a_3, \\ da_1 = -\omega_{32}a_0 - \omega_{22}a_1 - \omega_{12}a_2 - \omega_{02}a_3, \\ da_2 = -\omega_{31}a_0 - \omega_{21}a_1 - \omega_{11}a_2 - \omega_{01}a_3, \\ da_3 = -\omega_{30}a_0 - \omega_{20}a_1 - \omega_{10}a_2 - \omega_{00}a_3. \end{cases}$$

4. Cela posé, considérons sur une surface (Σ) un réseau conjugué; nous allons attacher aux différents points de (Σ) un repère *semi-normal* caractérisé par les propriétés suivantes.

---

[3]) Voir notre Mémoire „Sur la déformation projective des surfaces", Ann. Ec. Norm., t. 37 (1920), p. 259—356, et aussi „La méthode du repère mobile, etc.", Exposés de Géométrie V, Hermann 1935. Voir également G. Fubini et E. Čech, „Introduction à la géométrie projective différentielle des surfaces", Paris, Gauthier-Villars, 1931, Chap. XIII et XIV, p. 218—256.

1° Le point analytique A_0 et le plan analytique a_0 sont respectivement confondus avec le point donné de (Σ) et le plan tangent en ce point.

2° Les points analytiques A_1 et A_2 engendrent les réseaux transformés de Laplace du réseau donné, les plans analytiques a_1 et a_2 étant respectivement les plans tangents en ces points aux surfaces qu'ils engendrent.

Les hypothèses faites se traduisent par les relations

$$\omega_{03} = \omega_{12} = \omega_{21} = 0, \tag{4}$$

qui ont un caractère dualistique; la propriété du réseau d'être conjugué se traduit par les relations

$$\omega_{13} = p\omega_{01}, \quad \omega_{23} = q\omega_{02}.$$

Rappelons enfin que les lignes asymptotiques sont données par

$$\omega_{01}\,\omega_{13} + \omega_{02}\,\omega_{23} \equiv p\,(\omega_{01})^2 + q\,(\omega_{02})^2 = 0.$$

5. Si u et v désignent les paramètres des lignes du réseau, on peut poser

$$\omega_{01} = a_{01}\,du, \quad \omega_{02} = b_{02}\,dv, \quad \omega_{ij} = a_{ij}\,du + b_{ij}\,dv.$$

Nous allons déterminer l'équation ponctuelle de Laplace du réseau donné; soit

$$\frac{\partial^2 A_0}{\partial u\,\partial v} + \alpha\frac{\partial A_0}{\partial u} + \beta\frac{\partial A_0}{\partial v} + \gamma A_0 = 0.$$

On a, d'après (2),

$$\frac{\partial A_0}{\partial u} = a_{00}A_0 + a_{01}A_1, \qquad \frac{\partial A_0}{\partial v} = b_{00}A_0 + b_{02}A_2,$$

$$\frac{\partial A_1}{\partial v} = b_{10}A_0 + b_{11}A_1, \qquad \frac{\partial A_2}{\partial u} = a_{20}A_0 + a_{22}A_2,$$

d'où l'on tire, par un calcul facile,

$$\frac{\partial^2 A_0}{\partial u\,\partial v} = a_{00}\frac{\partial A_0}{\partial v} + \left(b_{11} + \frac{\partial \ln a_{01}}{\partial v}\right)\frac{\partial A_0}{\partial u} +$$

$$+ \left[\frac{\partial a_{00}}{\partial v} + a_{01}b_{10} - a_{00}\left(b_{11} + \frac{\partial \ln a_{01}}{\partial v}\right)\right] A_0 =$$

$$= b_{00}\frac{\partial A_0}{\partial u} + \left(a_{22} + \frac{\partial \ln b_{02}}{\partial u}\right)\frac{\partial A_0}{\partial v} + \left[\frac{\partial b_{00}}{\partial u} + b_{02}a_{20} - b_{00}\left(a_{22} + \frac{\partial \ln b_{02}}{\partial u}\right)\right] A_0.$$

On a donc

$$\left\{\begin{aligned} &\alpha = -b_{00} = -\left(b_{11} + \frac{\partial \ln a_{01}}{\partial v}\right), \\ &\beta = -a_{00} = -\left(a_{22} + \frac{\partial \ln b_{02}}{\partial u}\right), \\ &\gamma = -\frac{\partial a_{00}}{\partial v} - a_{01}b_{10} + \alpha\beta = -\frac{\partial b_{00}}{\partial u} - b_{02}a_{20} + \alpha\beta, \end{aligned}\right. \tag{5}$$

d'où les invariants

$$h = \frac{\partial \alpha}{\partial u} + \alpha\beta - \gamma = b_{02}a_{20}, \qquad k = \frac{\partial \beta}{\partial v} + \alpha\beta - \gamma = a_{01}b_{10}.$$

Les deux formes invariantes $h[du\,dv]$ et $k[du\,dv]$ sont tout simplement

$$h[du\,dv] = -[\omega_{02}\omega_{20}], \quad k[du\,dv] = [\omega_{01}\omega_{10}]. \tag{6}$$

Si l'on passe de l'équation de Laplace ponctuelle à l'équation de Laplace tangentielle, on trouve par un calcul analogue,

$$\bar{h}[du\,dv] = -[\omega_{23}\omega_{32}], \quad \bar{k}[du\,dv] = [\omega_{13}\omega_{31}]. \tag{7}$$

6. Les réseaux J sont, d'après (I), caractérisés par les relations

$$[\omega_{01}\omega_{10}] + [\omega_{02}\omega_{20}] = 0, \quad [\omega_{13}\omega_{31}] + [\omega_{23}\omega_{32}] = 0. \tag{I'}$$

Ces relations expriment, d'après (2), *que les deux formes* ω_{00} *et* ω_{33} *sont des différentielles exactes.*

Les réseaux R sont caractérisés par les deux relations

$$[\omega_{02}\omega_{20}] + [\omega_{13}\omega_{31}] = 0, \quad [\omega_{01}\omega_{10}] + [\omega_{23}\omega_{32}] = 0. \tag{II'}$$

Elles expriment que les deux formes $\omega_{00} - \omega_{33}$ *et* $\omega_{11} - \omega_{22}$ *sont des différentielles exactes.*

Enfin les réseaux E sont caractérisés par les deux relations

$$[\omega_{01}\omega_{10}] - [\omega_{13}\omega_{31}] = 0, \quad [\omega_{02}\omega_{20}] - [\omega_{23}\omega_{32}] = 0. \tag{III'}$$

Elles expriment que les deux formes ω_{11} *et* ω_{22} *sont des différentielles exactes.*

On remarquera, sous cette forme, les nouvelles analogies qui existent entre ces trois classes de réseaux. Remarquons enfin que la propriété d'un réseau d'être isotherme conjugué se traduit par le fait que la forme $\omega_{00} - \omega_{33}$ est une différentielle exacte: c'est une propriété classique pour les réseaux J et les réseaux R; elle n'appartient pas en général aux réseaux E.

7. La recherche des surfaces J revient, d'après ce qui précède, à l'intégration du système de Pfaff

$$\begin{cases} \omega_{03} = 0, \quad \omega_{13} = p\omega_{01}, \quad \omega_{23} = q\omega_{02}, \quad \omega_{12} = 0, \quad \omega_{21} = 0, \\ d\lambda = \omega_{00}, \quad d\mu = \omega_{33}. \end{cases} \tag{8}$$

La dérivation extérieure de ces équations conduit aux équations quadratiques extérieures

$$\begin{cases} [\omega_{01}\,(dp + p\,\overline{\omega_{00} + \omega_{33} - 2\omega_{11}})] = 0, \\ [\omega_{02}\,(dq + q\,\overline{\omega_{00} + \omega_{33} - 2\omega_{22}})] = 0, \\ p[\omega_{01}\omega_{32}] - [\omega_{02}\omega_{10}] = 0, \\ -[\omega_{01}\omega_{20}] + q[\omega_{02}\omega_{31}] = 0, \\ [\omega_{01}\omega_{10}] + [\omega_{02}\omega_{20}] = 0, \\ p[\omega_{01}\omega_{31}] + q[\omega_{02}\omega_{32}] = 0. \end{cases} \tag{9}$$

Il s'introduit six formes indépendantes de ω_{01} et ω_{02}, à savoir

$$dp + p(\omega_{00} + \omega_{33} - 2\omega_{11}), \quad dq + q(\omega_{00} + \omega_{33} - 2\omega_{22}), \quad \omega_{10}, \quad \omega_{20}, \quad \omega_{31}, \quad \omega_{32}.$$

Le déterminant de leurs coefficients dans les équations (8) est

$$\omega_{01}\omega_{02}(p^2\omega_{01}^4 - q^2\omega_{02}^4);$$

il n'est pas identiquement nul. Par suite *la solution générale du système* (8) *dépend de six fonctions arbitraires d'un argument. Les caractéristiques des surfaces intégrales sont les familles de lignes qui annulent le déterminant: ce sont les lignes asymptotiques* ($p\omega_{01}^2 + q\omega_{02}^2 = 0$), *les lignes du réseau J* ($\omega_{01}\omega_{02} = 0$) *et les lignes du réseau conjugué J' dont les tangentes sont conjuguées harmoniques par rapport aux tangentes de J* ($p\omega_{01}^2 - q\omega_{02}^2 = 0$).

Les surfaces *J* sont donc *exceptionnelles*; elles ont le même degré de généralité que les surfaces projectivement déformables *R*, mais elles ne coïncident pas avec elles, parce que les caractéristiques du système différentiel qui les définit ne sont pas les mêmes. Naturellement un calcul analogue au précédent donnerait les caractéristiques des surfaces *R*.

8. Passons au système différentiel des surfaces *E*, formé des équations de Pfaff

$$(10)\quad \begin{cases} \omega_{03} = 0, \quad \omega_{13} = p\omega_{01}, \quad \omega_{23} = q\omega_{02}, \quad \omega_{12} = 0, \quad \omega_{23} = 0, \\ d\lambda = \omega_{11}, \quad d\mu = \omega_{22}. \end{cases}$$

Les équations dérivées sont les équations (9), dont les deux dernières sont à remplacer par

$$(11)\qquad [\omega_{01}(\omega_{10} - p\omega_{31})] = 0, \quad [\omega_{02}(\omega_{20} - q\omega_{32})] = 0.$$

On en déduit des relations de la forme

$$\omega_{10} = p\omega_{31} + \alpha\omega_{01}, \quad \omega_{20} = q\omega_{32} + \beta\omega_{02},$$

d'où, en tenant compte de la 3-ème et de la 4-ème équation (9),

$$q\alpha - p\beta = 0;$$

mais on peut alors disposer du point A_3, encore mobile sur la droite A_0A_3, de manière à annuler α, et par suite β. On peut donc substituer au système (10) le suivant:

$$(12)\quad \begin{cases} \omega_{03} = 0, \quad \omega_{13} = p\omega_{01}, \quad \omega_{23} = q\omega_{02}, \quad \omega_{12} = 0, \quad \omega_{21} = 0, \\ d\lambda = \omega_{11}, \quad d\mu = \omega_{22}, \quad \omega_{10} = p\omega_{31}, \quad \omega_{20} = q\omega_{32}. \end{cases}$$

Il conduit aux équations quadratiques extérieures

$$(13)\quad \begin{cases} [\omega_{01}(dp + p\overline{\omega_{00} + \omega_{33} - 2\omega_{11}})] = 0, \\ [\omega_{02}(dq + q\overline{\omega_{00} + \omega_{33} - 2\omega_{22}})] = 0, \\ [\omega_{01}\omega_{32}] - [\omega_{02}\omega_{31}] = 0, \\ 2p[\omega_{01}\omega_{30}] + [\omega_{31}(dp + p\overline{\omega_{00} + \omega_{33} - 2\omega_{11}})] = 0, \\ 2q[\omega_{02}\omega_{30}] + [\omega_{32}(dq + q\overline{\omega_{00} + \omega_{33} - 2\omega_{22}})] = 0. \end{cases}$$

Il s'introduit maintenant, en outre de ω_{01} et ω_{02}, cinq formes de Pfaff

$$dp + p(\omega_{00} + \omega_{33} - 2\omega_{11}), \quad dq + q(\omega_{00} + \omega_{33} - 2\omega_{22}), \quad \omega_{30}, \quad \omega_{31}, \quad \omega_{32}.$$

Les dérivées partielles des premiers membres de (13) par rapport à ces cinq formes donnent le déterminant

$$\begin{vmatrix} -\omega_{01} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\omega_{02} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega_{02} & -\omega_{01} \\ -\omega_{31} & 0 & -2p\omega_{01} & dp + p(\omega_{00} + \omega_{33} - 2\omega_{11}) & 0 \\ 0 & -\omega_{32} & -2q\omega_{02} & 0 & dq + q(\omega_{00} + \omega_{33} - 2\omega_{22}) \end{vmatrix},$$

qui, développé, devient

$$2\omega_{01}^2\omega_{02}^2(p\,dq - q\,dp + 2pq\overline{\omega_{11} - \omega_{22}}).$$

Le système de Pfaff (12) *est en involution et sa solution générale dépend de cinq fonctions arbitraires d'un argument. Les caractéristiques sont les lignes du réseau E* ($\omega_{01}\omega_{02} = 0$) *comptées deux fois, et la famille de lignes*

$$\frac{dp}{p} - \frac{dq}{q} = 2(\omega_{11} - \omega_{22}).$$

Ces dernières caractéristiques peuvent être définies géométriquement. Nous pouvons d'abord, grâce à la présence d'un facteur arbitraire entrant dans chacun des points analytiques A_1 et A_2, supposer $p = q = 1$; les caractéristiques sont alors définies par $\omega_{11} - \omega_{22} = 0$. Or l'équation de la surface au voisinage d'un point est, en utilisant les coordonnées non homogènes x, y, z relatives au repère semi-normal attaché à ce point, de la forme

$$z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \frac{1}{6}(ax^3 + by^3) + \ldots$$

en posant

$$\omega_{00} + \omega_{33} - 2\omega_{11} = a\omega_{01}, \quad \omega_{00} + \omega_{33} - 2\omega_{22} = b\omega_{02}.$$

Les équations des tangentes de Darboux à l'origine sont de la forme

$$ax^3 + by^3 + (\lambda x + \mu y)(x^2 + y^2) = 0;$$

en écrivant que le premier nombre est apolaire par rapport à $x^2 + y^2$, on trouve

$$ax^3 + by^3 - \frac{3}{4}(ax + by)(x^2 + y^2) = 0.$$

Exprimons que le groupe polaire de la tangente $y - mx = 0$ par rapport au triplet des tangentes de Darboux est confondu avec les tangentes $xy = 0$ du réseau E; on trouve $m = \frac{a}{b}$; or on a $2(\omega_{11} - \omega_{22}) = b\omega_{02} - a\omega_{01}$, ce qui donne précisément $\frac{a}{b}$ pour coefficient angulaire de la tangente à la caractéristique.

Toute caractéristique simple du système différentiel des surfaces E a donc pour tangente la droite dont le groupe polaire par rapport au triplet des tangentes de Darboux est formé des tangentes au réseau E.

II

9. Nous allons indiquer maintenant sans démonstration quelles sont les équations aux dérivées partielles qui donnent les réseaux J, R ou E situés sur une surface donnée. Rapportons cette surface à ses lignes asymptotiques, et soit

$$dv^2 - \theta\,du^2 = 0$$

l'équation des courbes d'un réseau de cette surface. Les réseaux J, R et E sont respectivement définis par les équations

$$(J) \qquad \frac{\partial^2 \ln \theta}{\partial u\, \partial v} = 0, \quad \left(\frac{\beta}{\theta}\right)_u = (\gamma\theta)_v;$$

$$(R) \qquad \frac{\partial^2 \ln \theta}{\partial u\, \partial v} = 0, \quad (\gamma\sqrt{\theta})_u = \left(\frac{\beta}{\sqrt{\theta}}\right)_v;$$

$$(E) \qquad \left(\frac{\beta}{\theta}\right)_u = (\gamma\theta)_v, \; (\gamma\sqrt{\theta})_u = \left(\frac{\beta}{\sqrt{\theta}}\right)_v.$$

Nous remarquerons qu'en partant d'un réseau J et en posant

$$\sqrt{\theta'} = \frac{\beta}{\gamma\theta},$$

la deuxième équation (R), où on remplace θ par θ', se trouve vérifiée; quant à la première, elle l'est aussi si $\frac{\partial^2 \ln \frac{\beta}{\gamma}}{\partial u\, \partial v} = 0$, c'est-à-dire si la surface considérée est une surface F (isothermo-asymptotique). De là on déduit le théorème suivant:

Sur une surface F il existe une correspondance biunivoque entre les couples de réseaux J harmoniques entre eux et les réseaux R; à un réseau R $(dv^2 - \theta' du^2 = 0)$ correspond un premier réseau J dont les tangentes $dv^2 - \frac{\beta}{\gamma\sqrt{\theta'}} du^2 = 0$ constituent le groupe polaire par rapport aux tangentes de Darboux $\beta\, du^3 + \gamma\, dv^3 = 0$ de la tangente $dv + \sqrt{\theta'}\, du = 0$ à la première famille de courbes du réseau R, et un second réseau J dont les tangentes $dv^2 + \frac{\beta}{\gamma\sqrt{\theta'}} du^2 = 0$ constituent le groupe polaire de la tangente $dv - \sqrt{\theta'}\, du = 0$ à la seconde famille de courbes du réseau R. Ces deux réseaux J sont harmoniques.

10. La discussion des systèmes différentiels qui donnent les réseaux J et E tracés sur une surface donnée peut se faire comme pour les réseaux R; il y a au plus ∞^2 réseaux J tracés sur une surface; ce cas ne peut se présenter que si la surface est isothermo-asymptotique, et cette surface admet alors ∞^2 réseaux R. Quant aux réseaux E, il y en a ∞^1 si la surface est réductible à $\beta = \gamma = 1$; la fonction θ est alors une constante arbitraire. Dans le cas contraire, la surface admet au plus 6 réseaux E. Comme il résulte des équations (E), si un réseau E est tracé sur une surface, ce réseau reste E par déformation projective de la surface; c'est une propriété qui est classique également pour les réseaux J.

Ajoutons enfin que les caractéristiques signalées plus haut des surfaces E sont données par l'équation

$$\frac{\beta}{\sqrt{\theta}}\, du + \gamma\sqrt{\theta}\, dv = 0,$$

dont le premier membre est une différentielle exacte.

К ВОПРОСУ ОБ ИНТЕГРИРОВАНИИ ДИФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ $y\,dy - y\,dx = R(x)\,dx$.

Б. М. Коялович (Ленинград).

§ 1. Диференциальное уравнение

$$y\,dy - y\,dx = R\,(x)\,dx \tag{1}$$

является одним из простейших среди тех, для которых мы не знаем интегрального эквивалента в конечной форме. Это дает повод думать, что трудности, связанные с отысканием этого эквивалента, приведены в этом уравнении к своей простейшей, основной форме, и, следовательно, изучая это уравнение, мы можем надеяться хоть несколько вскрыть их природу.

Вероятно этим следует объяснить большое количество работ, начиная с Эйлера, посвященных этому уравнению. В моей диссертации „Исследования о диференциальном уравнении $y\,dy - y\,dx = R\,dx$“, СПБ 1894, читатель может найти критический обзор всей литературы по этому вопросу, появившейся до того времени. Насколько я знаю, с тех пор ничего существенного не появлялось.

Вопросы формального интегрирования в настоящее время не привлекают к себе внимания ученых. Приходится иногда даже слышать пренебрежительные отзывы о них („квадратурное мастерство“). Но при всем моем уважении к научности и строгости современных задач и методов теории диференциальных уравнений, я все-таки не могу отрешиться от чувства, что в основе вышеупомянутого пренебрежения лежит рассуждение общеизвестной басни о лисице и винограде. Я думаю, что исследование вопроса об интегрировании уравнения (1) может и теперь еще дать кое-что новое и небезынтересное.

Конечно, нужно вести это исследование какими-нибудь новыми, нешаблонными путями (ибо бессилие шаблонных путей слишком хорошо известно). Свыше сорока лет назад я опубликовал в Протоколах СПБ математического общества некоторые своеобразные формулы, относящиеся к уравнению (1), посредством которых мне удалось легко решить одну задачу, квалифицированную потом ныне покойным академиком Н. Я. Сониным в его статье, помещенной в Известиях Академии наук, как весьма трудную. Настоящая статья и имеет целью дальнейшее развитие и разработку этих формул. В результате получается совершенно новый факт, что уравнение (1) может быть проинтегрировано, если мы знаем четыре его решения.

§ 2. Ввиду трудности задачи — найти все решения любого данного уравнения типа (1) — попробуем сначала построить такие уравнения этого типа, которые имели бы несколько известных нам решений, *причем одно из них могло бы оставаться произвольным* (это нужно для того, чтобы наши результаты были приложимы к любому уравнению типа (1).

Чтобы построить уравнение, допускающее одно известное нам решение $f(x)$, достаточно определить функцию $R(x)$ из очевидного уравнения

$$R(x) = f(x)f'(x) - f(x).$$

Пусть теперь α_1 и α_2 будут какие угодно два решения уравнения (1). Мы имеем

$$\alpha_1 d\alpha_1 - \alpha_1 dx = R(x)\,dx,$$
$$\alpha_2 d\alpha_2 - \alpha_2 dx = R(x)\,dx,$$

откуда находим

$$dx = \frac{\alpha_2\,d\alpha_2 - \alpha_1\,d\alpha_1}{\alpha_2 - \alpha_1}, \tag{2}$$

$$R(x)\,dx = \frac{\alpha_1\alpha_2\,(d\alpha_1 - d\alpha_2)}{\alpha_2 - \alpha_1}. \tag{3}$$

Следовательно, если задать две какие угодно функции α_1 и α_2 от некоторого параметра t, то из уравнения (2) найдем посредством одной квадратуры выражение x через t, а следовательно, и t через x. После этого уравнение (3) и даст нам функцию R, которая в силу произвольности α_1 и α_2 может быть какою угодно.

Обратно, если определить dx и R по уравнениям (2) и (3), то α_1 и α_2 будут решениями соответствующего уравнения (1).

§ 3. Обратимся теперь к составлению уравнения (1), допускающего три известных нам решения.

Пусть α_1, α_2, α_3 будут какие угодно три решения уравнения (1). Из уравнений

$$\alpha_1 d\alpha_1 - \alpha_1 dx = R(x)\,dx,$$
$$\alpha_2 d\alpha_2 - \alpha_2 dx = R(x)\,dx,$$
$$\alpha_3 d\alpha_3 - \alpha_3 dx = R(x)\,dx$$

мы исключаем dx и $R(x)\,dx$ и находим

$$(\alpha_2 - \alpha_1)\,\alpha_3\,d\alpha_3 + (\alpha_1 - \alpha_3)\,\alpha_2\,d\alpha_2 + (\alpha_3 - \alpha_2)\,\alpha_1\,d\alpha_1 = 0. \tag{4}$$

Таким образом *каждые* три решения уравнения (1) удовлетворяют уравнению (4). Но и обратно, каждые три функции α_1, α_2, α_3 от одного параметра, удовлетворяющие этому уравнению, будут решениями одного и того же уравнения типа (1). Действительно, для этого достаточно, зная α_1 и α_2, определить x и $R(x)\,dx$ по уравнениям (2) и (3). После этого уравнение (4) покажет, что и α_3 будет решением того же уравнения типа (1).

Теперь положим в уравнении (4)

$$\alpha_2 = \alpha_1 + u, \quad \alpha_3 = \alpha_1 + v. \tag{5}$$

Мы получим тогда

$$\alpha_1 = \frac{dv - du}{\frac{du}{u} - \frac{dv}{v}}. \tag{6}$$

Эта формула и решает поставленный вопрос. Действительно, возьмем за v произвольную функцию от u. Тогда уравнение (6) даст нам α_1 как функцию от u, а затем уравнения (5) дадут α_2 и α_3. После этого по уравнениям (2) и (3) найдем dx и $R(x)\,dx$ и, значит, составим требуемое уравнение (1).

§ 4. Теперь обратимся к составлению уравнения с *четырьмя* известными решениями.

Пусть α_1, α_2, α_3, α_4 будут какие угодно четыре решения уравнения (1). Разобьем их на две группы:

$$\text{I. } \alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3;\quad \text{II. } \alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_4.$$

Аналогично (5) положим для этих групп:

$$\begin{aligned} &\text{I. } \alpha_2 = \alpha_1 + u, \quad \alpha_3 = \alpha_1 + v; \\ &\text{II. } \alpha_2 = \alpha_1 + u, \quad \alpha_4 = \alpha_1 + w. \end{aligned} \tag{7}$$

Формула (6) даст для первой группы

$$\alpha_1 = \frac{dv - du}{\frac{du}{u} - \frac{dv}{v}} \tag{6}$$

и для второй

$$\alpha_1 = \frac{dw - du}{\frac{du}{u} - \frac{dw}{w}}. \tag{8}$$

Чтобы все эти решения α_1, α_2, α_3, α_4 принадлежали одному и тому же уравнению (1), необходимо (и достаточно), чтобы оба значения для α_1 совпадали. Это дает нам уравнение

$$\frac{dw - du}{\frac{du}{u} - \frac{dw}{w}} = \frac{dv - du}{\frac{du}{u} - \frac{dv}{v}}. \tag{9}$$

Дело приводится к отысканию трех функций u, v, w от одного параметра, удовлетворяющих уравнению (9), причем одна из них должна оставаться произвольной функцией от другой (чтобы результат мог относиться к *любому* уравнению типа (1)). Для достижения этой цели достаточно обратить внимание на то обстоятельство, что уравнение (9) однородно относительно u, v, w и, сообразно этому, положить

$$v = \alpha u, \quad w = \beta u. \tag{10}$$

Тогда из уравнения (9) выводим

$$\frac{du}{u} = \frac{(\alpha - \beta)\,d\alpha\,d\beta}{\beta(\beta - 1)\,d\alpha - \alpha(\alpha - 1)\,d\beta}. \tag{11}$$

Это уравнение и решает нашу задачу. Действительно, возьмем за β *произвольную* функцию от α. Уравнение (11) посредством квадратуры даст нам выражение u через α. После этого уравнения (10) дадут нам выражения v и w через α. Далее, формула (6) даст α_1, а уравнения (7) дадут α_2, α_3, α_4. Наконец, уравнения (2) и (3) дадут нам само уравнение (1). Это уравнение будет

$$y\,dy - y\left(d\alpha_1 + \alpha_1 \frac{du}{u} + du\right) = -\frac{\alpha_1(\alpha_1 + u)}{u}\,du. \tag{12}$$

Напоминаем, что u дается уравнением (11), а α_1 — уравнением (6).

Дадим сводку соответствующих формул:

I. $\beta = \varphi(\alpha)$.

$$\text{II.}\quad \frac{du}{u} = \frac{(\alpha-\beta)\,d\alpha\,d\beta}{\beta(\beta-1)\,d\alpha - \alpha(\alpha-1)\,d\beta}. \tag{11}$$

$$\text{III.}\quad v = \alpha u, \quad w = \beta u. \tag{10}$$

$$\text{IV.}\quad \alpha_1 = -\alpha u\left[(\alpha-1)\frac{du}{u\,d\alpha} + 1\right]. \tag{13}$$

$$\text{V.}\quad \alpha_2 = \alpha_1 + u, \quad \alpha_3 = \alpha_1 + \alpha u, \quad \alpha_4 = \alpha_1 + \beta u. \tag{14}$$

Можно убедиться прямой подстановкой, что α_1, α_2, α_3, α_4 удовлетворяют уравнению (12). Функция φ остается произвольной.

Пример. Положим

$$\beta = c\alpha + c_1. \tag{15}$$

Уравнение (11) даст

$$\frac{du}{u} = -\frac{c(c-1)\alpha + cc_1}{c(c-1)\alpha^2 + 2cc_1\alpha + c_1^2 - c_1}\,d\alpha, \tag{16}$$

или, если положить

$$c(c-1)\alpha^2 + 2cc_1\alpha + c_1^2 - c_1 = \Omega, \tag{17}$$

то

$$\frac{du}{u} = -\frac{1}{2}\frac{d\Omega}{\Omega}$$

и, следовательно,

$$u = \frac{1}{\sqrt{\Omega}} = \frac{1}{\sqrt{c(c-1)\alpha^2 + 2cc_1\alpha + c_1^2 - c_1}}. \tag{18}$$

Далее, по уравнениям (10)

$$v = \alpha u = \frac{\alpha}{\sqrt{c(c-1)\alpha^2 + 2cc_1\alpha + c_1^2 - c_1}},$$

$$w = \beta u = \frac{c\alpha + c_1}{\sqrt{c(c-1)\alpha^2 + 2cc_1\alpha + c_1^2 - c_1}}.$$

Затем уравнение (13) даст

$$\alpha_1 = -\alpha\Omega^{-3/2}\left[2c(c-1)\alpha^2 + 2cc_1\alpha + c_1^2 - c_1\right], \tag{19}$$

и после этого требуемое уравнение (1) получится путем подстановки в уравнение

$$y\,dy - y\left[d\alpha_1 + \alpha_1\frac{du}{u} + du\right] = -\frac{\alpha_1(\alpha_1+u)}{u}\,du \tag{12'}$$

вместо α_1 его выражения (19), а вместо u — функции $\frac{1}{2\sqrt{\Omega}}$. Не привожу окончательной формулы ввиду ее сложности. Решения этого уравнения будут α_1, $\alpha_1 + \frac{1}{\sqrt{\Omega}}$, $\alpha_1 + \frac{\alpha}{\sqrt{\Omega}}$, $\alpha_1 + \frac{c\alpha + c_1}{\sqrt{\Omega}}$.

§ 5. Займемся теперь построением уравнения, которое имело бы *пять* известных нам решений.

Пусть $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$ будут какие угодно пять решений уравнения (1). Образуем из них две группы:

$$\text{I.}\quad \alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \alpha_4;$$
$$\text{II.}\quad \alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \alpha_5.$$

Пусть u, v, w будут величины, относящиеся к первой группе:

$$u = \alpha_2 - \alpha_1,\quad v = \alpha_3 - \alpha_1,\quad w = \alpha_4 - \alpha_1.$$

Пусть u, w, w' будут подобные же величины для второй группы:

$$u = \alpha_2 - \alpha_1,\quad v = \alpha_3 - \alpha_1,\quad w' = \alpha_5 - \alpha_1.$$

Положим, как и раньше,

$$v = \alpha u,\quad w = \beta u,\quad w' = \gamma u. \tag{20}$$

Мы имели раньше

$$\frac{du}{u} = \frac{(\alpha-\beta)\,d\alpha\,d\beta}{\beta(\beta-1)\,d\alpha - \alpha(\alpha-1)\,d\beta}. \tag{11}$$

Подобным же образом для второй группы получим

$$\frac{du}{u} = \frac{(\alpha-\gamma)\,d\alpha\,d\gamma}{\gamma(\gamma-1)\,d\alpha - \alpha(\alpha-1)\,d\gamma}. \tag{21}$$

Следовательно,

$$\frac{(\alpha-\gamma)\,d\gamma}{\gamma(\gamma-1)\,d\alpha - \alpha(\alpha-1)\,d\gamma} = \frac{(\alpha-\beta)\,d\beta}{\beta(\beta-1)\,d\alpha - \alpha(\alpha-1)\,d\beta}. \tag{22}$$

От решения этого уравнения зависит весь успех исследования.

Это уравнение можно переписать так:

$$\frac{(\alpha-\gamma)\dfrac{d\gamma}{\gamma(\gamma-1)}}{\dfrac{d\alpha}{\alpha(\alpha-1)} - \dfrac{d\gamma}{\gamma(\gamma-1)}} = \frac{(\alpha-\beta)\dfrac{d\beta}{\beta(\beta-1)}}{\dfrac{d\alpha}{\alpha(\alpha-1)} - \dfrac{d\beta}{\beta(\beta-1)}}.$$

Прибавляя к каждой части по α, находим

$$\frac{(\alpha-\gamma)\dfrac{d\gamma}{\gamma(\gamma-1)} + \alpha\left[\dfrac{d\alpha}{\alpha(\alpha-1)} - \dfrac{d\gamma}{\gamma(\gamma-1)}\right]}{\dfrac{d\alpha}{\alpha(\alpha-1)} - \dfrac{d\gamma}{\gamma(\gamma-1)}} =$$
$$= \frac{(\alpha-\beta)\dfrac{d\beta}{\beta(\beta-1)} + \alpha\left[\dfrac{d\alpha}{\alpha(\alpha-1)} - \dfrac{d\beta}{\beta(\beta-1)}\right]}{\dfrac{d\alpha}{\alpha(\alpha-1)} - \dfrac{d\beta}{\beta(\beta-1)}}$$

или

$$\frac{\dfrac{d\alpha}{\alpha-1}-\dfrac{d\gamma}{\gamma-1}}{\dfrac{d\alpha}{\alpha(\alpha-1)}-\dfrac{d\gamma}{\gamma(\gamma-1)}}=\frac{\dfrac{d\alpha}{\alpha-1}-\dfrac{d\beta}{\beta-1}}{\dfrac{d\alpha}{\alpha(\alpha-1)}-\dfrac{d\beta}{\beta(\beta-1)}}.$$

Чтобы упростить еще больше, перепишем это уравнение так:

$$\frac{\dfrac{d\alpha}{\alpha(\alpha-1)}-\dfrac{d\gamma}{\gamma(\gamma-1)}}{\dfrac{d\alpha}{\alpha-1}-\dfrac{d\gamma}{\gamma-1}}=\frac{\dfrac{d\alpha}{\alpha(\alpha-1)}-\dfrac{d\beta}{\beta(\beta-1)}}{\dfrac{d\alpha}{\alpha-1}-\dfrac{d\beta}{\beta-1}},$$

и вычтем по единице из обеих частей. Тогда получим

$$\frac{\dfrac{d\gamma}{\gamma}-\dfrac{d\alpha}{\alpha}}{\dfrac{d\gamma}{\gamma-1}-\dfrac{d\alpha}{\alpha-1}}=\frac{\dfrac{d\beta}{\beta}-\dfrac{d\alpha}{\alpha}}{\dfrac{d\beta}{\beta-1}-\dfrac{d\alpha}{\alpha-1}}. \tag{23}$$

Этим уравнением мы и займемся. Задача состоит в том, чтобы найти три удовлетворяющие ему функции α, β, γ, из которых одна могла бы оставаться произвольной функцией от другой.

§ 6. Мы воспользуемся теперь тем, что числители и знаменатели обеих частей уравнения (23) суть полные дифференциалы; сообразно этому положим

$$\begin{cases} \dfrac{d\gamma}{\gamma}-\dfrac{d\alpha}{\alpha}=d\omega, & \omega=\ln\gamma-\ln\alpha, \\ \dfrac{d\gamma}{\gamma-1}-\dfrac{d\alpha}{\alpha-1}=d\omega', & \omega'=\ln(\gamma-1)-\ln(\alpha-1); \end{cases} \tag{24}$$

$$\begin{cases} \dfrac{d\beta}{\beta}-\dfrac{d\alpha}{\alpha}=d\psi, & \psi=\ln\beta-\ln\alpha, \\ \dfrac{d\beta}{\beta-1}-\dfrac{d\alpha}{\alpha-1}=d\psi', & \psi'=\ln(\beta-1)-\ln(\alpha-1). \end{cases} \tag{25}$$

Тогда уравнение (23) принимает вид

$$\frac{d\omega}{\omega'}=\frac{d\psi}{\psi'}. \tag{26}$$

С другой стороны, формулы (24) дают

$$\frac{\gamma}{\alpha}=e^{\omega}, \qquad \gamma=\alpha e^{\omega},$$

$$\frac{\gamma-1}{\alpha-1}=e^{\omega'}, \quad \gamma-1=(\alpha-1)e^{\omega'},$$

откуда

$$\alpha e^{\omega}-1=(\alpha-1)e^{\omega'};$$

следовательно,

$$\alpha=\frac{e^{\omega'}-1}{e^{\omega'}-e^{\omega}},$$

значит,

$$\frac{1}{\alpha}=\frac{e^{\omega'}-e^{\omega}}{e^{\omega'}-1},$$

и отсюда

$$\frac{1}{\alpha} - 1 = \frac{1-\alpha}{\alpha} = -\frac{e^{\omega}-1}{e^{\omega'}-1}.$$

Совершенно так же формулы (25) дадут

$$\frac{1}{\alpha} - 1 = \frac{1-\alpha}{\alpha} = -\frac{e^{\psi}-1}{e^{\psi'}-1},$$

откуда находим

$$\frac{e^{\omega}-1}{e^{\omega'}-1} = \frac{e^{\psi}-1}{e^{\psi'}-1}. \tag{27}$$

Следовательно, каков бы ни был показатель k, имеем

$$\frac{(e^{\omega}-1)^k}{(e^{\omega'}-1)^k} = \frac{(e^{\psi}-1)^k}{(e^{\psi'}-1)^k}.$$

Перемножая почленно это уравнение и (26), находим

$$\frac{(e^{\omega}-1)^k\, d\omega}{(e^{\omega'}-1)^k\, d\omega'} = \frac{(e^{\psi}-1)^k\, d\psi}{(e^{\psi'}-1)^k\, d\psi'}. \tag{28}$$

Напоминаем, что ψ и ψ' зависят только от α и β, т. е. от четырех решений уравнения (1), а ω и ω' зависят от α и γ, т. е. и от пятого решения этого уравнения, именно:

$$\alpha = \frac{\alpha_3 - \alpha_1}{\alpha_2 - \alpha_1}, \quad \beta = \frac{\alpha_4 - \alpha_1}{\alpha_2 - \alpha_1}, \quad \gamma = \frac{\alpha_5 - \alpha_1}{\alpha_2 - \alpha_1}.$$

§ 7. Теперь остановимся на одном частном случае, который, как увидим, окажется чрезвычайно важным. Именно, рассмотрим уравнения типа (1), для которых обе части уравнения (28) обращаются в некоторую постоянную c, т. е. для которых

$$\frac{(e^{\omega}-1)^k\, d\omega}{(e^{\omega'}-1)^k\, d\omega'} = c, \tag{29}$$

$$\frac{(e^{\psi}-1)^k\, d\psi}{(e^{\psi'}-1)^k\, d\psi'} = c. \tag{30}$$

Построить эти уравнения типа (1) можно так: из уравнения (30) находим

$$(e^{\psi}-1)^k\, d\psi = c(e^{\psi'}-1)^k\, d\psi';$$

следовательно, если положить

$$F(z, k) = \int^z (e^t - 1)^k\, dt, \tag{31}$$

будем иметь

$$F(\psi, k) = cF(\psi', k) + c_1. \tag{32}$$

Это уравнение определяет β как функцию от α. После этого определяем u по уравнению (11) и затем строим искомое уравнение, как объяснено в § 4. Не останавливаясь на этом, займемся более важными соображениями.

Подобно уравнению (32) мы имеем из уравнения (29)

$$F(\omega, k) = cF(\omega', k) + c_2 \tag{33}$$

(c_1 и c_2 суть произвольные постоянные). Следовательно, каковы бы ни были постоянные k, c, c_1, c_2, если определить β и γ из уравнений (32) и (33), β и γ будут удовлетворять уравнениям (29) и (30), а следовательно, и (28); из него же в силу (27) будет вытекать и уравнение (26), т. е. эти β и γ будут действительно соответствовать пяти решениям некоторого уравнения типа (1). Так как при этом γ будет содержать постоянную c_2, которой не будет в самом уравнении (1), то ясно, что это γ будет давать *общий интеграл* этого уравнения (1).

§ 8. Таким образом наши исследования привели нас к построению нового класса уравнений типа (1), допускающих интегрирование в квадратурах, причем особенно замечательно то, что в составе интеграла этого уравнения фигурирует новая трансцендентная функция $F(z, k)$. Может быть, именно ее присутствием объясняются те трудности, которые представляло до сих пор это уравнение.

Ввиду важности дела упростим по возможности этот результат. Мы имели выше уравнения

$$\frac{e^{\omega}-1}{e^{\omega'}-1}=\frac{e^{\psi}-1}{e^{\psi'}-1}=\frac{\alpha-1}{\alpha}. \tag{34}$$

С другой стороны, мы разбираем теперь случай, когда выполняются уравнения (29) и (30). На основании (34) уравнение (30) принимает вид

$$\frac{d\psi}{d\psi'}=\frac{\dfrac{d\beta}{\beta}-\dfrac{d\alpha}{\alpha}}{\dfrac{d\beta}{\beta-1}-\dfrac{d\alpha}{\alpha-1}}=c\left(\frac{\alpha}{\alpha-1}\right)^k. \tag{35}$$

Мы получаем, значит, следующий результат: общий интеграл уравнения

$$\frac{\dfrac{d\beta}{\beta}-\dfrac{d\alpha}{\alpha}}{\dfrac{d\beta}{\beta-1}-\dfrac{d\alpha}{\alpha-1}}=c\left(\frac{\alpha}{\alpha-1}\right)^k$$

дается уравнением

$$F(\psi, k)=cF(\psi', k)+H, \tag{36}$$

где положено

$$F(z, k)=\int^z (e^t-1)^k\,dt$$

и H есть произвольная постоянная.

Уравнение (35) относительно β, очевидно, легко приводится к типу (1). Может быть, даже было бы правильно считать его основным, типическим видом уравнения (1), которое тогда (в общем виде) имело бы такую форму:

$$\frac{\dfrac{d\beta}{\beta}-\dfrac{d\alpha}{\alpha}}{\dfrac{d\beta}{\beta-1}-\dfrac{d\alpha}{\alpha-1}}=\Phi(\alpha). \tag{37}$$

§ 9. В этом результате весьма важно то, что уравнение (35) содержит две произвольных постоянных c и k, причем оно может быть про-

интегрировано при всяких значениях c и k. Это обстоятельство открывает возможность дальнейших обобщений, а именно позволяет применить метод вариации произвольных постоянных. Действительно, будем считать в уравнении (36) c и k функциями от α, откуда вытекает, что можно считать c за функцию от k. Уравнение (36) не перестанет давать решение уравнения (35), если для $d\beta$ будет получаться такое же выражение, какое получалось прежде (при постоянных c и k). Это дает нам следующее уравнение:

$$(38) \qquad c = \varphi(k), \quad \frac{\partial F(\psi, k)}{\partial k} = \varphi'(k) F(\psi', k) + \varphi(k) \frac{\partial F(\psi', k)}{\partial k}.$$

Если знать функцию φ, то это уравнение даст нам выражение k, а следовательно, и c, как функцию от α. После этого уравнение (36) и даст нам решение уравнения (35).

Предположим теперь, что мы знаем *четыре решения* уравнения (1). Зная их, мы находим по уравнениям (7) и (10) соответственные α и β, и значит, будем знать β как функцию от α. После этого процесс получения искомой функции φ мы представляем себе так: полученное выражение β через α мы подставляем в уравнение (36) и из этого уравнения и (38) исключаем α. Получаем обыкновенное уравнение первого порядка, интегрирование которого и даст нам функцию φ с одной произвольной постоянной Γ.

Теперь обратимся к основному пункту всего исследования, который состоит в том, что *общий интеграл этого уравнения нам будет всегда известен.* Действительно, ведь это уравнение получается так: нужно в уравнении (36) заменить β его выражением через α, присоединить уравнение (38) и из двух полученных уравнений исключить величину α. Но ведь уравнение (38) есть не что иное, как результат диференцирования предыдущего уравнения (36) в предположении, что α играет роль постоянного числа. Стало быть, это и есть как раз тот самый процесс, которым это уравнение получается из своего общего интеграла. Следовательно, если в уравнении (36) заменить α через Γ, то это уравнение и даст общий интеграл интересующего нас уравнения. Роль произвольной постоянной и будет играть это Γ.

Таким образом для функции φ мы получим выражение с одной произвольной постоянной Γ, *которой не было в соотношении между* β *и* α, *а значит, и в самом уравнении* (1). Следовательно, мы и получим общий интеграл этого уравнения (1). Отсюда и вытекает, что, зная четыре решения уравнения (1), мы можем проинтегрировать это уравнение.

О НАГРУЖЕННЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ, ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ КОТОРЫХ НЕ МОНОТОННЫ.

М. Г. Крейн (Одесса).

Введение. В дальнейшем мы будем рассматривать только ядра $K(x, s)$ $[a \leqslant x, s \leqslant b]$, удовлетворяющие следующим двум условиям:

А) *Ядро ограничено:* $|K(x, s)| < M \quad [a \leqslant x, s \leqslant b]$.

В) *Если фиксировать каким-либо образом значение одной из переменных x или s, то ядро будет непрерывно в интервале (a, b) относительно другой переменной.*

Можно легко показать, что при этих условиях — для любых функций $\sigma(x)$ и $\tau(x)$ $(a \leqslant x \leqslant b)$ с ограниченным изменением — интегралы

$$\int_a^b K(x, s)\, d\sigma(s) \quad \text{и} \quad \int_a^b K(x, s)\, d\tau(x)$$

будут непрерывными функциями x, соответственно s в интервале (a, b) и, кроме того,

$$\int_a^b d\tau(x) \int_a^b K(x, s)\, d\sigma(s) = \int_a^b d\sigma(s) \int_a^b K(x, s)\, d\tau(x).$$

Мы обозначим общую величину этих двух интегралов через

$$\int_a^b \int_a^b K(x, s)\, d\sigma(s)\, d\tau(x).$$

Целью этой статьи является детальное изучение, при допущении некоторых дополнительных предположений относительно ядра $K(x, s)$, „нагруженного“ интегрального уравнения

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, s)\, \varphi(s)\, d\sigma(s) = f(x), \tag{1}$$

где функция распределения $\sigma(x)$ является произвольной функцией с ограниченным изменением.

Известно, что если ядро $K(x, s)$ непрерывно в квадрате $[a \leqslant x, \ s \leqslant b]$, то для уравнения (1) можно воспроизвести всю классическую теорию Фредгольма, заменяя во всех формулах этой теории, где фигурируют обыкновенные интегралы с дифференциалами dx, ds, dr и т. д., эти интегралы на интегралы Стилтьеса с соответствующими дифференциалами

$d\sigma(x)$, $d\sigma(s)$, $d\sigma(r)$ и т. д. [1]). Основные результаты теории Фредгольма остаются верными для уравнения (1) также и в случае, когда ядро $K(x, s)$ удовлетворяет условиям A) и B), так как в этом случае итерированное ядро

$$K^{(2)}(x, s) = \int_a^b K(x, r) K(r, s) \, d\sigma(r)$$

непрерывно в квадрате $[a \leqslant x, \ s \leqslant b]$.

С другой стороны, теория Гильберта-Шмидта вообще не верна для уравнения (1) с симметрическим ядром $K(x, s)$. Для сохранения этой теории нужно предположить функцию распределения $\sigma(x)$ существенно возрастающей (или убывающей), так как только в этом случае интеграл $\int_a^b \varphi^2(x) \, d\sigma(x)$ не обращается в нуль ни для какой непрерывной функции $\varphi(x) \not\equiv 0$, и все процессы ортогонализации, играющие столь важную роль в теории Гильберта-Шмидта, сохраняются [2]).

Задачей этой работы является доказательство того, что для уравнения (1), в котором $\sigma(x)$ произвольно, возможно построить теорию, в известном смысле аналогичную теории Гильберта-Шмидта, если предположить ядро $K(x, s)$ положительным в смысле Мерсера.

Наше исследование уравнения (1) значительно упрощается использованием теоремы Громмера, которую можно сформулировать так:

Теорема Громмера [3]). *Для того чтобы мероморфная функция* $F(z) \not\equiv \not\equiv \text{const}$, *обладающая в окрестности точки* $z = 0$ *разложением*

$$F(z) = s_0 + s_1 z + s_2 z^2 + \ldots,$$

имела только вещественные полюсы a_i $(i = 1, 2, \ldots)$ *и допускала во всех точках регулярности разложение*

$$F(z) = m_0 + \sum_{i=1}^{\omega} \frac{m_i}{a_i - z} \quad (\omega \leqslant \infty),$$

---

[1]) Уравнение (1) является очень частным случаем уравнений, изученных Радоном (J. Radon, Über lineare Funktionaltransformationen und Funktionalgleichungen, Sitzungsberichte d. Akad. d. Wiss. Wien, math.-naturw. Kl., Abt. IIa, т. 128 (1919), стр. 1083—1121; русский перевод в „Успехах математических наук", вып. I, стр. 200—227) и Гюнтером (N. Gunther, Sur les intégrales de Stieltjes et leurs applications aux problèmes de la physique mathématique, Труды Физико-математического института имени В. А. Стеклова, т. 1, 1932), на которые эти авторы распространили теорию Фредгольма.

[2]) Можно, впрочем, рассматривать теорию Гильберта-Шмидта как справедливую также и для случая монотонной функции $\sigma(x)$, если условиться не делать различия между двумя непрерывными функциями, отличными друг от друга только в интервалах постоянства функции $\sigma(x)$. Нагруженное интегральное уравнение с симметрическим ядром и с существенно возрастающей $\sigma(x)$ рассматривалось впервые (для одного частного случая) Кнезером (A. Kneser, Belastete Integralgleichungen, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, т. 37 (1914), стр. 169—197.)

[3]) J. Grommer, Ganze transzendente Funktionen mit lauter reellen Nullstellen, Journal für die reine und angewandte Mathematik, т. 144 (1914), стр. 114—166.

где $m_0 \geqslant 0$ *и* $\operatorname{sgn} m_i = \operatorname{sgn} a_i$ $(i = 1, 2, \ldots)$, *необходимо и достаточно, чтобы квадратичные формы*

$$\sum_{i,\ k=0}^{n} s_{i+k}\xi_i\xi_k \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

были все неотрицательными.

Можно было бы избежать в наших исследованиях использования теоремы Громмера, но мы этого делать не хотим, так как рассматриваем эту теорему как инструмент, употребление которого весьма естественно в известных вопросах теории линейных операторов. Заметим кстати, что теорема Громмера может быть также очень полезна в теории симметризуемых ядер, равно как и в обычной теории интегральных уравнений с симметрическим ядром.

Наиболее трудной частью наших исследований является та, в которой устанавливается, при известных условиях относительно $K(x, s)$, равенство между числом положительных характеристических чисел уравнения (1) и числом точек роста положительного изменения $P(x)$ функции $\sigma(x)$ (см. теорему 4). Мы пользуемся следующим предложением:

Обобщенная теорема Ф. Рисса. *Пусть* E *— замкнутое множество точек в интервале* (a, b) *и* $\{\varphi_i(x)\}$ *— последовательность функций, непрерывных в* (a, b). *Для того чтобы для всякой непрерывной функции* $f(x)$ $(a \leqslant x \leqslant b)$ *и всякого* $\varepsilon > 0$ *существовала линейная комбинация* $\sum_{i=1}^{n} c_i\varphi_i(x)$ *такая, что*

$$\left| f(x) - \sum_{i=1}^{n} c_i\varphi_i(x) \right| < \varepsilon \quad \text{при} \quad x \subset E,$$

необходимо и достаточно, чтобы всякая функция $\tau(x)$ $(a \leqslant x \leqslant b)$ *с ограниченным изменением, удовлетворяющая условиям*

1) $\tau(x) = \frac{1}{2}[\tau(x+0) + \tau(x-0)]$ *при* $a < x < b$,

2) $\int_a^b \varphi_i(x)\, d\tau(x) = 0$ *при всех* $i = 1, 2, 3, \ldots$,

3) *все точки изменения* [4]) $\tau(x)$ *принадлежат к* E,

сводилась к постоянной.

Ф. Рисс установил [5]) это предложение для частного случая $E = (a, b)$, в котором, следовательно, условие 3) всегда выполнено. Но можно тем же способом доказать справедливость этого предложения в общем случае [6]). Заметим еще, что интегральное уравнение (1) с симметрическим положительным ядром $K(x, s)$ является сопряженным с полярным интегральным уравнением

$$\psi(x) - \lambda \int_a^b A(x) K(x, s) \psi(s)\, ds = f(x), \tag{2}$$

---

[4]) Определение этого термина см. на стр. 98.

[5]) F. Riesz, Sur certains systèmes singuliers d'équations intégrales, Annales de l'École Normale Supérieure, т. 28 (1911), стр. 33—62.

[6]) Доказательство этой теоремы можно упростить, употребляя современные методы, изложенные в книге S. Banach, Théorie des opérations linéaires, стр. 58, 59, Warszawa, 1932.

если $\sigma(x) = \int_a^x A(x)\,dx$. Можно поэтому рассматривать наши исследования как содержащие некоторые дополнения к исследованиям Гильберта [7]), Марти [8]), Гарбе [9]) и Мерсера [10]).

Заметим, наконец, что конечные результаты этих исследований уже опубликованы в заметке, помещенной в Докладах Парижской академии [11]).

§ 1. 1. Пусть $K(x, s)$ $[a \leqslant x,\ s \leqslant b]$ — симметрическое вещественное ядро, удовлетворяющее условиям A) и B), приведенным во введении. Такое ядро называется *положительным*, если для каждой функции $\tau(x)$ $(a \leqslant x \leqslant b)$ с ограниченным изменением имеет место неравенство

$$\int_a^b \int_a^b K(x, s)\,d\tau(x)\,d\tau(s) \geqslant 0. \tag{3}$$

Заметим еще, что при положительном ядре $K(x, s)$ равенство

$$\int_a^b \int_a^b K(x, s)\,d\tau_0(x)\,d\tau_0(s) = 0 \tag{4}$$

для какой-либо функции $\tau = \tau_0$ имеет место тогда и только тогда, когда

$$\int_a^b K(x, s)\,d\tau_0(s) \equiv 0 \quad (a \leqslant x \leqslant b). \tag{5}$$

Действительно, полагая в (3) $\tau(x) = \tau_0(x) + \alpha\xi_t(x)$ $(a \leqslant t \leqslant b)$, где

$$\xi_t(x) = \begin{cases} 0 & (a \leqslant x < t), \\ 1 & (t \leqslant x \leqslant b), \end{cases}$$

получим в силу (4)

$$2\alpha \int_a^b K(t, s)\,d\tau_0(s) + \alpha^2 K(t, t) \geqslant 0.$$

Так как это неравенство имеет место для всякого вещественного α, то отсюда заключаем, что

$$\int_a^b K(t, s)\,d\tau_0(s) \equiv 0 \quad (a \leqslant t \leqslant b).$$

Итак, из (4) следует (5); обратное очевидно.

После этого предварительного замечания перейдем к изучению нагруженного интегрального уравнения

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, s)\,\varphi(s)\,d\sigma(s) = 0, \tag{6}$$

---

[7]) D. Hilbert, Grundzüge einer allgemeiner Theorie der linearen Integralgleichungen, гл. XV, стр. 195—204.

[8]) J. Marty, Sur une équation intégrale, C. R. Acad. Sci. Paris, т. 150 (1910), стр. 515—518; Développements suivant certaines solutions singulières, там же, стр. 603—606.

[9]) E. Garbe, Zur Theorie der Integralgleichung dritter Art, Math. Annalen, т. 76 (1915), стр. 527—547.

[10]) J. Mercer, Symmetrisable functions and their expansion in terms of biorthogonal functions, London Roy. Soc. Proc. (A), т. 97 (1920), стр. 401—413.

[11]) M. Krein, Sur les équations intégrales chargées, C. R. Acad. Sci. Paris, т. 201 (1935), стр. 24—26. В этой заметке предполагается, что ядро $K(x, s)$ непрерывно в квадрате $[a \leqslant x,\ s \leqslant b]$, но, как мы покажем далее, достаточно предположить, что $K(x, s)$ удовлетворяет условиям A) и B).

где $K(x, s)$ — вещественное симметрическое положительное ядро и $\sigma(x)$ — какая-либо определенная функция с ограниченным изменением. Прежде всего, допуская, что это уравнение обладает фундаментальными функциями и, следовательно, характеристическими числами, сформулируем несколько простых предложений:

1°. *Каждые две фундаментальные функции* $\varphi_\nu(x)$ *и* $\varphi_\mu(x)$, *соответствующие двум различным характеристическим числам* $\lambda_\nu \neq \lambda_\mu$, *ортогональны, т. е.*

$$\int_a^b \varphi_\nu(x)\,\varphi_\mu(x)\,d\sigma(x) = 0.$$

Доказательство ничем не отличается от доказательства аналогичного предложения в теории обыкновенных уравнений с симметрическим ядром.

2°. *Все характеристические числа рассматриваемого уравнения вещественны.*

В самом деле, пусть λ_0 есть характеристическое число и $\varphi_0(x)$ — соответствующая фундаментальная функция. Если λ_0 комплексно, то сопряженная величина $\bar{\lambda}_0 \neq \lambda_0$ является также характеристическим числом с фундаментальной функцией $\bar{\varphi}_0(x)$. Но тогда фундаментальные функции $\varphi_0(x) = \psi(x) + i\chi(x)$ и $\bar{\varphi}_0(x) = \psi(x) - i\chi(x)$ ортогональны и потому

$$\begin{aligned}\lambda_0 \int_a^b \varphi_0(x)\,\bar{\varphi}_0(x)\,d\sigma(x) &= \int_a^b\int_a^b K(x, s)\,\varphi_0(x)\,\bar{\varphi}_0(s)\,d\sigma(x)\,d\sigma(s) = \\ &= \int_a^b\int_a^b K(x, s)\,\psi(x)\,\psi(s)\,d\sigma(x)\,d\sigma(s) + \\ &+ \int_a^b\int_a^b K(x, s)\,\chi(x)\,\chi(s)\,d\sigma(x)\,d\sigma(s) = 0.\end{aligned}$$

Так как ядро $K(x, s)$ положительно, то отсюда заключаем, что

$$\begin{aligned}\int_a^b\int_a^b K(x, s)\,\psi(x)\,\psi(s)\,d\sigma(x)\,d\sigma(s) &= \\ = \int_a^b\int_a^b K(x, s)\,\chi(x)\,\chi(s)\,d\sigma(x)\,d\sigma(s) &= 0.\end{aligned}$$

Но это, на основании сделанного выше замечания об эквивалентности равенств (4) и (5), дает

$$\int_a^b K(x, s)\,\psi(s)\,d\sigma(s) = \int_a^b K(x, s)\,\chi(s)\,d\sigma(s) \equiv 0,$$

и, следовательно,

$$\varphi_0(x) = \lambda_0 \int_a^b K(x, s)\,\varphi_0(s)\,d\sigma(s) \equiv 0,$$

что невозможно.

Из вещественности характеристических чисел уравнения (6) следует, что всякая фундаментальная функция $\varphi_0(x)$ раскладывается на две вещественные фундаментальные функции $\psi = \frac{1}{2}(\varphi_0 + \bar{\varphi}_0)$ и $\chi = \frac{1}{2}(\varphi_0 - \bar{\varphi}_0)$. Мы ограничимся поэтому в дальнейшем изучением вещественных фундаментальных функций.

3°. *Конечномерное* [12]) *линейное многообразие* E_0 *всех фундаментальных функций, соответствующих одному и тому же характеристическому числу* λ_0, *содержит ортогональный базис* $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_m(x)$ [13]), *том смысле, что*

$$\int_a^b \varphi_i(x)\,\varphi_k(x)\,d\sigma(x) = \begin{cases} \operatorname{sgn}\lambda_0 & (i=k) \\ 0 & (i\neq k) \end{cases} \quad (i,\ k=1, 2, \ldots, m).$$

В самом деле, положим для двух каких-либо функций $\varphi \subset E_0$ и $\psi \subset E_0$

$$[\varphi, \psi] = \operatorname{sgn}\lambda_0 \int_a^b \varphi(x)\,\psi(x)\,d\sigma(x).$$

Произведение" $[\varphi, \psi]$ обладает в E_0 всеми свойствами обыкновенного калярного произведения: оно билинейно, симметрично и

$$[\varphi, \varphi] = \frac{1}{|\lambda_0|}\int_a^b\int_a^b K(x, s)\,\varphi(x)\,\varphi(s)\,d\sigma(x)\,d\sigma(s) > 0,$$

если $\varphi \subset E_0$ и $\varphi \not\equiv 0$. Следовательно, в метризованном таким образом E_0 существует базис $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m$, для которого

$$[\varphi_i, \varphi_k] = \begin{cases} 1 & (i=k), \\ 0 & (i\neq k), \end{cases}$$

что и доказывает предложение 3°.

Строя для каждого характеристического числа соответствующий ортогональный базис и располагая функции этих базисов в последовательность (конечную или бесконечную), приходим в силу 1° к следующему заключению:

4°. *Из фундаментальных функций уравнения* (6) *можно образовать последовательность* $\varphi_1, \varphi_2, \ldots,$ *ортонормальную в том смысле, что*

$$(7) \qquad \int_a^b \varphi_i(x)\,\varphi_k(x)\,d\sigma(x) = \begin{cases} \operatorname{sgn}\lambda_i & (i=k) \\ 0 & (i\neq k) \end{cases} \quad (i, k=1, 2, \ldots),$$

где λ_i $(i=1, 2, \ldots)$ *— характеристические числа, соответствующие фундаментальным функциям* φ_i $(i=1, 2, \ldots)$, *и полную в том смысле, что всякая фундаментальная функция уравнения* (6) *есть линейная комбинация конечного числа функций этой последовательности.*

Пусть λ_0 — какое-либо из характеристических чисел уравнения (6). Положим

$$(8) \qquad K_0(x, s) = K(x, s) - \sum_{\lambda_i=\lambda_0} \frac{\varphi_i(x)\,\varphi_i(s)}{\lambda_i} \operatorname{sgn}\lambda_0,$$

где суммирование распространяется на значения i, для которых $\lambda_i = \lambda_0$. Здесь, как и в дальнейшем, мы обозначим через $\{\varphi_i\}$ полную ортонор-

---

[12]) Конечномерность многообразия E_0 вытекает из отмеченного ранее обстоятельства, что для исследуемого интегрального уравнения сохраняет силу теория Фредгольма.

[13]) Так что m является числом измерений многообразия E_0.

мальную последовательность фундаментальных функций уравнения (6 и через $\{\lambda_i\}$ — последовательность соответствующих характеристических чисел.

5°. *Полную ортонормальную последовательность фундаментальных функций уравнения*

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K_0(x, s)\, \varphi(s)\, d\sigma(s) = 0 \tag{9}$$

можно получить, выкидывая из последовательности $\{\varphi_i\}$ *фундаментальные функции, соответствующие* λ_0; *соответствующую последовательность характеристических чисел получим, удаляя из последовательности* $\{\lambda_i\}$ *члены, равные* λ_0.

В самом деле, в силу 1° или (7) имеем

$$\varphi_i(x) = \lambda_i \int_a^b K_0(x, s)\, \varphi_i(s)\, d\sigma(s) \quad \text{для} \quad \lambda_i \neq \lambda_0.$$

С другой стороны, если $\psi(x)$ есть фундаментальная функция уравнения (9), то

$$\psi(x) = \mu \int_a^b K_0(x, s)\, \psi(s)\, d\sigma(s), \tag{10}$$

а потому, так как

$$\int_a^b K_0(x, s)\, \varphi_i(x)\, d\sigma(x) = 0 \quad \text{при} \quad \lambda_i = \lambda_0, \tag{11}$$

получаем

$$\int_a^b \psi(x)\, \varphi_i(x)\, d\sigma(x) = 0 \quad \text{при} \quad \lambda_i = \lambda_0. \tag{12}$$

Но тогда из (8) и (10) находим, что

$$\psi(x) = \mu \int_a^b K(x, s)\, \psi(s)\, d\sigma(s).$$

Следовательно, $\psi(x)$ есть фундаментальная функция уравнения (6); в силу (12) $\mu \neq \lambda_0$ и $\psi(x)$ есть линейная комбинация конечного числа фундаментальных функций φ_i, для которых $\lambda_i = \mu \neq \lambda_0$, ч. и тр. д.

Обозначим через $\Gamma(x, s; \lambda)$ резольвенту уравнения (6); в окрестности точки $\lambda = 0$ будем иметь

$$\Gamma(x, s; \lambda) = K(x, s) + \lambda K^{(2)}(x, s) + \lambda^2 K^{(3)}(x, s) + \ldots,$$

где итерированные ядра $K^{(n)}(x, s)$ определены следующими формулами:

$$K^{(1)}(x, s) = K(x, s), \quad K^{(n+1)}(x, s) = \int_a^b K(x, r)\, K^{(n)}(r, s)\, d\sigma(r)$$
$$(n = 2, 3, \ldots).$$

Легко проверить с помощью формул (11) и (7), что равенство (8) влечет за собой равенства

$$K^{(n)}(x, s) = K_0^{(n)}(x, s) + \sum_{\lambda_i = \lambda_0} \frac{\varphi_i(x)\, \varphi_i(s)}{\lambda_i^n} \operatorname{sgn} \lambda_0,$$

и, следовательно,

$$\Gamma(x, s; \lambda) = \Gamma_0(x, s; \lambda) + \frac{1}{\lambda_0 - \lambda} \sum_{\lambda_i = \lambda_0} \varphi_i(x)\, \varphi_i(s) \cdot \operatorname{sgn} \lambda_0. \tag{13}$$

Отсюда мы приходим к такому предложению:

6°. *Пусть* $\tau(x)$ *— произвольная функция с ограниченным изменением. Главная часть мероморфной функции*

$$F(\lambda)=\int_a^b\int_a^b \Gamma(x, s; \lambda)\, d\tau(x)\, d\tau(s)$$

в окрестности полюса $\lambda=\lambda_0$ *равна*

$$\frac{1}{\lambda_0-\lambda}\sum_{\lambda_i=\lambda_0}\left(\int_a^b \varphi_i(x)\, d\tau(x)\right)^2\cdot \operatorname{sgn}\lambda_0.$$

В самом деле, в силу (13)

$$\int_a^b\int_a^b \Gamma(x, s; \lambda)\, d\tau(x)\, d\tau(s)=\int_a^b\int_a^b \Gamma_0(x, s; \lambda)\, d\tau(x)\, d\tau(s)+$$
$$+\frac{1}{\lambda_0-\lambda}\sum_{\lambda_i=\lambda_0}\left(\int_a^b \varphi_i(x)\, d\tau(x)\right)^2\cdot \operatorname{sgn}\lambda_0,$$

где первый член правой части является, в силу 5°, функцией, регулярной в точке $\lambda=\lambda_0$.

Теперь мы располагаем всем необходимым для того, чтобы дать достаточно краткое доказательство следующей теоремы:

Теорема 1. *Если ядро* $K(x, s)$, *удовлетворяющее условиям* A) *и* B), *положительно, то интегральное уравнение*

$$\varphi(x)-\lambda\int_a^b K(x, s)\,\varphi(s)\, d\sigma(s)=0$$

обладает по крайней мере одним характеристическим числом тогда и только тогда, когда $K^{(2)}(x, s)\not\equiv 0$.

Если это условие выполнено, то уравнению (6) *соответствует полная ортонормальная последовательность фундаментальных функций* $\{\varphi_i\}$,

$$\int_a^b \varphi_l(x)\,\varphi_k(x)\, d\sigma(x)=\begin{cases}\operatorname{sgn}\lambda_l & (i=k),\\ 0 & (i\neq k),\end{cases} \tag{14}$$

где λ_l *есть характеристическое число, соответствующее* φ_l $(i=1, 2, \ldots)$.

Итерированные ядра $K^{(n)}(x, s)$ $(n=2, 3, \ldots)$ *разлагаются в ряды по фундаментальным функциям*

$$K^{(n)}(x, s)=\sum_{i=1}^{\omega}\frac{\varphi_i(x)\,\varphi_i(s)}{\lambda_i^n}\operatorname{sgn}\lambda_i \quad (n=2, 3, \ldots;\ \omega\leqslant\infty), \tag{15}$$

равномерно и абсолютно сходящиеся в квадрате $[a\leqslant x,\ s\leqslant b]$.

Кроме того,

$$K(x, s)=R(x, s)+\sum_{i=1}^{\omega}\frac{\varphi_i(x)\,\varphi_i(s)}{\lambda_i}\operatorname{sgn}\lambda_i, \tag{16}$$

где $R(x, s)$ либо тождественно равно нулю либо, как и $K(x, s)$, есть положительное ядро, удовлетворяющее условиям A) *и* B) *и такое, что*

$$R^{(2)}(x, s) \equiv \int_a^b R(x, r) R(r, s) d\sigma(r) \equiv 0.$$

Доказательство. Пусть $\tau(x)$ — какая-либо функция с ограниченным изменением. Рассмотрим мероморфную функцию

$$F(\lambda) = \int_a^b \int_a^b \Gamma(x, s; \lambda) d\tau(x) d\tau(s) = \sum_{k=0}^{\infty} s_k \lambda^k,$$

где

$$s_k = \int_a^b \int_a^b K^{(k+1)}(x, s) d\tau(x) d\tau(s) \quad (k = 0, 1, 2, \ldots).$$

Покажем, что квадратичные формы

$$\sum_{i, k=0}^{n} s_{i+k} \eta_i \eta_k \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

все неотрицательны. В самом деле, полагая

$$g_n(x) = \sum_{j=0}^{n} \eta_j \int_a^b K^{(j)}(x, s) d\tau(s),$$

находим легко, что

$$\sum_{i, k=0}^{n} s_{i+k} \eta_i \eta_k = \int_a^b \int_a^b K(x, s) g_n(x) g_n(s) d\sigma(x) d\sigma(s) \geqslant 0 \ ^{14}).$$

Мы можем применить теперь к функции $F(\lambda)$ теорему Громмера (см. введение). По этой теореме функция $F(\lambda)$ не имеет полюсов только тогда, когда она сводится к постоянной, т. е. когда $s_1 = s_2 = s_3 = \ldots = 0$. Следовательно, если интегральное уравнение (6) не имеет характеристических чисел и, значит, $\Gamma(x, y; \lambda)$ и $F(\lambda)$ суть целые функции, то

$$s_1 = \int_a^b \int_a^b K^{(2)}(x, s) d\tau(x) d\tau(s) = 0. \tag{17}$$

Так как это равенство имеет место для всякой функции $\tau(x)$ с ограниченным изменением, то отсюда заключаем, что $K^{(2)}(x, s) \equiv 0$ [15]). Обратно, из этого тождества следует, что $K^{(n)}(x, s) \equiv 0$ $(n = 2, 3, \ldots)$, $\Gamma(x, s; \lambda) = K(x, s)$ и, значит, в этом случае уравнение (6) не имеет характеристических чисел. Первая часть теоремы тем самым доказана.

---

[14]) Так как $K(x, s)$ положительно.

[15]) В самом деле, полагая в (17) $\tau(x) = \xi_t(x)$ $(a \leqslant t \leqslant b)$, где

$$\xi_t(x) = \begin{cases} 0 & (a \leqslant x < t) \\ 1 & (t \leqslant x \leqslant b), \end{cases}$$

находим, что $K^{(2)}(t, t) = 0$. Полагая затем $\tau(x) = \xi_{t_1}(x) + \xi_{t_2}(x)$ $(a \leqslant t_1, \ t_2 \leqslant b)$, получаем $K^{(2)}(t_1, t_2) = 0$ $(a \leqslant t_1, t_2 \leqslant b)$.

Если $K^{(2)}(x, s) \not\equiv 0$, то функция $F(\lambda)$ является вообще мероморфной с полюсами в точках $\lambda = \lambda_i$ $(i = 1, 2, \ldots)$ и мы получаем, согласно теореме Громмера, разложение

$$\int_a^b \int_a^b \Gamma(x, s; \lambda)\, d\tau(x)\, d\tau(s) = m_0 + \sum_{i=1}^{\omega} \frac{m_i}{\lambda_i - \lambda}. \tag{18}$$

Принимая во внимание предложение 6°, мы видим, что здесь *можно* положить

$$m_i = \left(\int_a^b \varphi_i(x)\, d\tau(x)\right)^2 \operatorname{sgn} \lambda_i \quad (i = 1, 2, \ldots).$$

Имея эти выражения для m_i, положим сначала в (18) $\tau(x) = \xi_t(x)$ $(a \leqslant t \leqslant b)$ и затем $\tau(x) = \xi_r(x) + \xi_t(x)$; мы придем тогда к соотношению

$$\Gamma(r, t; \lambda) = R(r, t) + \sum_{i=1}^{\omega} \frac{\varphi_i(r)\, \varphi_i(t)}{\lambda_i - \lambda} \operatorname{sgn} \lambda_i. \tag{19}$$

Это соотношение включает в себя все разложения (15) и (16). Так как $R(t, t)$ представляет величину m_0 в (18) при $\tau(x) = \xi_t(x)$ $(a \leqslant t \leqslant b)$, то, по теореме Громмера, получаем неравенство $R(x, x) \geqslant 0$ $(a \leqslant x \leqslant b)$. Поэтому из (16) имеем

$$\sum_{i=1}^{\omega} \frac{\varphi_i^2(x)}{|\lambda_i|} \leqslant K(x, x). \tag{20}$$

Опираясь на это неравенство, легко доказать, что разложения (15) сходятся абсолютно и равномерно в квадрате $[a \leqslant x, s \leqslant b]$. Кроме того, неравенство (20) вместе с неравенством

$$\sum_{m}^{n} \left| \frac{\varphi_i(x)\, \varphi_i(s)}{\lambda_i} \right| \leqslant \sqrt{\sum_{m}^{n} \frac{\varphi_i^2(x)}{|\lambda_i|}} \sqrt{\sum_{m}^{n} \frac{\varphi_i^2(s)}{|\lambda_i|}}$$

показывает, что ряд $\sum_{i=1}^{\omega} \frac{\varphi_i(x)\, \varphi_i(s)}{|\lambda_i|}$ сходится абсолютно и равномерно относительно одной из переменных, когда другая фиксирована, и его сумма есть ограниченная функция в квадрате $[a \leqslant x, s \leqslant b]$. Отсюда следует, что функция $R(x, s)$ удовлетворяет условиям A) и B). Ядро $R(x, s)$ либо тождественно обращается в нуль, либо положительно, так как в силу (18), (19) и теоремы Громмера

$$m_0 = \int_a^b \int_a^b K(x, s)\, d\tau(x)\, d\tau(s) \geqslant 0.$$

Наконец, из разложения (16) следует в силу (14), что

$$\int_a^b R(x, s)\, \varphi_i(s)\, d\sigma(s) \equiv 0 \quad (a \leqslant x \leqslant b;\ i = 1, 2, \ldots),$$

и значит,

$$K^{(2)}(x, s) = R^{(2)}(x, s) + \sum_{i=1}^{\omega} \frac{\varphi_i(x)\,\varphi_i(s)}{\lambda_i^2} \operatorname{sgn} \lambda_i.$$

Но это равенство совместимо с (15) лишь при условии $R^{(2)}(x, s) \equiv 0$.

Теорема 1, таким образом, полностью доказана.

2. Не ограничивая общности, мы можем нормировать в дальнейшем всякую функцию $\tau(x)$ с ограниченным изменением [в том числе и функцию распределения $\sigma(x)$] так, чтобы

$$\tau(x) = \frac{\tau(x+0) + \tau(x-0)}{2} \quad \text{при} \quad a < x < b.$$

Дадим два определения.

Определение 1. Симметрическое ядро $K(x, s)$, удовлетворяющее условиям A) и B), называется *абсолютно замкнутым*, если не существует никакой функции $\tau(x)$ с ограниченным изменением (и нормированной), для которой

$$\int_a^b K(x, s)\, d\tau(s) \equiv 0 \quad (a \leqslant x \leqslant b).$$

Определение 2. Симметрическое ядро $K(x, s)$, удовлетворяющее условиям A) и B), называется *абсолютно положительным*, если для всякой функции $\tau(x) \not\equiv \text{const}$ с ограниченным изменением (и нормированной) интеграл

$$\int_a^b \int_a^b K(x, s)\, d\tau(x)\, d\tau(s)$$

положителен.

Согласно замечанию, сделанному в начале настоящего параграфа, положительное ядро $K(x, s)$ абсолютно положительно тогда и только тогда, когда оно абсолютно замкнуто.

Условимся еще обозначать через E_τ совокупность точек изменения функции $\tau(x)$ с ограниченным изменением. Под *точкой изменения* функции с ограниченным изменением $\tau(x)$ $(a \leqslant x \leqslant b)$ мы понимаем всякую точку интервала (a, b), которая не содержится ни в каком подинтервале, в котором $\tau(x) = \text{const}$. Очевидно, E_τ всегда замкнуто.

Теорема 2. *Если $K(x, s)$ абсолютно положительна и функция распределения $\sigma(x)$ не есть константа, то $K^{(2)}(x, s) \not\equiv 0$.*

В разложении

$$K(x, s) = R(x, s) + \sum_{i=1}^{\omega} \frac{\varphi_i(x)\,\varphi_i(s)}{\lambda_i} \operatorname{sgn} \lambda_i \quad (a \leqslant x, s \leqslant b)$$

$R(x, s) = 0$ для $x \subset (a, b)$ и $s \subset E_\tau$.

Доказательство. Положим при всяком $s \subset (a, b)$

$$\tau_s(x) = \int_a^x K(r, s)\, d\sigma(r) \quad (a \leqslant x \leqslant b).$$

Тогда

$$K^{(2)}(x, s) = \int_a^b K(x, r)\, d\tau_s(r).$$

Следовательно, если $K^{(2)}(x, s) \equiv 0$, то $\tau_s(x) = \tau_s(a) = 0$ $(a \leqslant x \leqslant b)$, так как $K(x, s)$ абсолютно замкнуто. В частности,

$$\tau_s(b) = \int_a^b K(r, s)\, d\sigma(r) = 0$$

для всякого $s \subset (a, b)$; но это невозможно для абсолютно замкнутого ядра. Следовательно, первая часть теоремы доказана.

Положим теперь для всякого $s \subset (a, b)$

$$\omega_s(x) = \int_a^x R(r, s)\, d\sigma(r) \quad (a \leqslant x \leqslant b).$$

Тогда

$$\int_a^b K(x, r)\, d\omega_s(r) = \int_a^b K(x, r) \left(K(r, s) - \sum_{i=1}^{\omega} \frac{\varphi_i(r)\, \varphi_i(s)}{|\lambda_i|} \right) d\sigma(r) = 0,$$

так как

$$K^{(2)}(x, s) = \sum_{i=1}^{\omega} \frac{\varphi_i(x)\, \varphi_i(s)}{\lambda_i^2} \operatorname{sgn} \lambda_i.$$

Но $K(x, s)$ абсолютно замкнуто, поэтому

$$\omega_s(x) = \int_t^x R(r, s)\, d\sigma(r) = 0 \quad (a \leqslant x \leqslant b). \tag{21}$$

С другой стороны, легко проверить, что если для непрерывной функции $f(x)$ интеграл $\int_a^x f(r)\, d\sigma(r)$ тождественно равен нулю, то $f(x) = 0$ для всех $x \subset E_\sigma$ [16]). Поэтому из равенства (21) вытекает, что

$$R(x, s) = 0 \quad \text{для всех} \quad x \subset E_\sigma.$$

Это имеет место при всяком $s \subset (a, b)$, и теорема доказана.

Следствие 1. *Если $K(x, s)$ абсолютно положительно и всякая точка $x \subset (a, b)$ есть точка изменения $\sigma(x)$, то разложение*

$$K(x, s) = \sum_{i=1}^{\omega} \frac{\varphi_i(x)\, \varphi_i(s)}{|\lambda_i|} \tag{22}$$

имеет место во всем квадрате $[a \leqslant x, s \leqslant b]$.

Возвращаясь к случаю произвольного E_σ, заметим еще, что если $K(x, x)$ непрерывна на множестве E_σ, то разложение (22) абсолютно и равномерно сходится на множестве F точек (x, s), где $x \subset (a, b)$ и $s \subset E_\sigma$. В самом деле, так как разложение

$$K(s, s) = \sum_{i=1}^{\omega} \frac{\varphi_i^2(s)}{|\lambda_i|} \quad (s \subset E_\sigma)$$

---

[16]) В самом деле, предполагая, что, наоборот, $f(x) \not\equiv 0$ при $x_0 - \varepsilon \leqslant x \leqslant x_0 + \varepsilon$, где $x_0 \subset E_\sigma$, мы находим из тождества $\tau(x) = \int_a^x f(r)\, d\sigma(r) = 0$, что $\int_{x_0-\varepsilon}^{x} d\sigma(x) = \int_{x_0-\varepsilon}^{x} \frac{1}{f(x)}\, d\tau(x) = 0$ при $x_0 - \varepsilon \leqslant x \leqslant x_0 + \varepsilon$, в противоречие с условием $x_0 \subset E_\sigma$.

равномерно сходится на E_σ, то в силу теоремы Дини [17]) мы с помощью неравенства

$$\sum_m^n \left| \frac{\varphi_i(x)\,\varphi_i(s)}{\lambda_i} \right| \leqslant \sqrt{\sum_m^n \frac{\varphi_i^2(x)}{|\lambda_i|}} \sqrt{\sum_m^n \frac{\varphi_i^2(s)}{|\lambda_i|}}$$

заключаем, что разложение (22) сходится равномерно и абсолютно на F [18]).

§ 2. Определение. Конечная или бесконечная последовательность $\{f_i(x)\}$ функций, непрерывных в (a, b), называется *абсолютно замкнутой на множестве* $E \subset (a, b)$, если для всякой непрерывной на (a, b) функции и всякого $\varepsilon > 0$ существует линейная комбинация $\sum_{i=1}^{n} c_i f_i(x)$ функций последовательности такая, что

$$\left| f(x) - \sum_{i=1}^{n} c_i f_i(x) \right| < \varepsilon \quad \text{для всех} \quad x \subset E.$$

Согласно обобщенной теореме Ф. Рисса, последовательность $\{f_i(x)\}$ абсолютно замкнута на замкнутом множестве $E \subset (a, b)$ тогда и только тогда, когда не существует никакой нормированной функции $\tau(x)$ $(a \leqslant x \leqslant b)$ с ограниченным положительным изменением такой, что $E_\tau \subset E$ и $\int_a^b f_i(x)\, d\tau(x) = 0$ для всех $i = 1, 2, \ldots$

Опираясь на это, нетрудно доказать следующую теорему:

Теорема 3. *Если ядро* $K(x, s)$ *абсолютно положительно и* $\operatorname{var} \sigma > 0$, *то полная ортонормальная последовательность* $\{\varphi_i\}$ *фундаментальных функций уравнения* (6) *абсолютно замкнута на* E_σ.

Доказательство. В самом деле, если $\tau(x)$ — нормированная функция с ограниченным положительным изменением и если $E_\tau \subset E$, то согласно теореме 2

$$\int_a^b K(x, s)\, d\tau(s) = \sum_{i=1}^{\omega} \frac{\varphi_i(x)}{|\lambda_i|} \int_a^b \varphi_i(s)\, d\tau(s) \quad (a \leqslant x \leqslant b), \tag{23}$$

так как

$$\int_a^b R(x, s)\, d\tau(s) \equiv 0 \quad (a \leqslant x \leqslant b)$$

в силу того, что

$$\int_a^b f(x)\, d\tau(x) = 0,$$

если $f(x) = 0$ для $x \subset E_\tau$.

С другой стороны, так как $K(x, s)$ абсолютно положительно, то левая часть равенства (23) не обращается в нуль тождественно, и поэтому по крайней мере один из интегралов $\int_a^b \varphi_i(s)\, d\tau(s)$ $(i = 1, 2, \ldots)$ отличен от нуля. Тем самым теорема доказана.

---

[17]) См. Гурса, Курс математического анализа, т. III, ч. II, стр. 120.

[18]) Следовательно, ядро $K(x, s)$ непрерывно на F. Вообще можно показать, что если для положительного ядра $K(x, s)$ функция $K(x, x)$ непрерывна на замкнутом множестве $E \subset (a, b)$, то ядро $K(x, s)$ непрерывно на множестве F точек (x, s), для которых $x \subset (a, b)$ и $s \subset E$.

Теорема 4. *Пусть*

$$\sigma(x) = \sigma(a) + P(x) - N(x)$$

есть разложение σ на ее положительное (P) и отрицательное (N) изменения. Если ядро $K(x, s)$ абсолютно положительно, то уравнение (6) *имеет конечное число положительных характеристических чисел тогда и только тогда, когда $P(x)$ имеет конечное число точек роста, причем тогда эти два числа совпадают.*

Аналогичная теорема имеет место и для функции $N(x)$.

Доказательство. В случае, когда $P(x)$ имеет конечное число точек роста $x_1, x_2, \ldots, x_n$ в интервале (a, b), для всякой непрерывной функции $f(x)$ можно написать равенство

$$\int_a^b f(x)\, d\sigma(x) = \int_a^b f(x)\, dP(x) - \int_a^b f(x)\, dN(x) = \tag{24}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} m_i f(x_i) - \int_a^b f(x)\, dN(x),$$

где

$$m_i = P(x_i + 0) - P(x_i - 0) > 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Полагая в (24) $f(x) = \sum_{i=1}^{p} \xi_i \varphi_i(x)$, где $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_p$ образуют какую-либо ортонормальную систему фундаментальных функций уравнения (6), соответствующих положительным характеристическим числам $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ (некоторые из которых могут совпадать), получаем в силу (14)

$$\sum_{i=1}^{p} \xi_i^2 = \sum_{j=1}^{n} m_j H_j^2 - \sum_{i,k=1}^{p} a_{ik} \xi_i \xi_k, \tag{25}$$

где

$$H_j = \sum_{i=1}^{p} \xi_i \varphi_i(x_j) \quad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

и квадратичная форма

$$\sum_{i,k=1}^{p} a_{ik} \xi_i \xi_k = \int_a^b \left(\sum_{i=1}^{p} \xi_i \varphi_i(x) \right)^2 dN(x)$$

неотрицательна.

Покажем, что, обратно, если в последовательности характеристических чисел $\{\lambda_i\}$ (соответствующей полной ортонормальной системе фундаментальных функций $\{\varphi_i\}$ уравнения (6)) имеется только p положительных характеристических чисел, то число n точек роста $P(x)$ конечно и $\leqslant p$. Отсюда легко будет вывести справедливость доказываемой теоремы.

Пусть, например, $\lambda_i > 0$ при $i = 1, 2, \ldots, p$ и $\lambda_i < 0$ для $i > p$. Тогда в силу (14) имеем соотношение

$$\int_a^b \left(\sum_{i=1}^{\nu} \xi_i \varphi_i(x) \right)^2 d\sigma(x) = \sum_{i=1}^{p} \xi_i^2 - \sum_{i=p+1}^{\nu} \xi_i^2 \quad (\nu > p). \tag{26}$$

С другой стороны, легко видеть, что если $P(x)$ имеет по крайней мере m точек роста, то можно выбрать в интервале (a, b) $2m$ точек непрерывности $\sigma(x)$: $\alpha_1 < \beta_1 < \alpha_2 < \beta_2 < \ldots < \alpha_m < \beta_m$, так, чтобы

$$\Delta_j = \sigma(\beta_j) - \sigma(\alpha_j) > 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, m).$$

Отправляясь от полученных таким образом интервалов $I_j = (\alpha_j, \beta_j)$ $(j = 1, 2, \ldots, m)$, определим непрерывные функции $\chi_j^{(\varepsilon)}(x)$ $(j = 1, 2, \ldots, m;\ \varepsilon > 0)$ следующими условиями:

$$(27) \qquad \begin{cases} \chi_j^{(\varepsilon)}(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \subset CI_j, \\ 1 & \text{при} \quad x \subset (\alpha_j + \varepsilon, \beta_j - \varepsilon), \end{cases} \\ \chi_j^{(\varepsilon)}(x) \quad \text{линейна в} \quad (\alpha_j, \alpha_j + \varepsilon) \text{ и } (\beta_j - \varepsilon, \beta_j), \end{cases}$$

где $CI_j = (a, b) - I_j$ $(j = 1, 2, \ldots, m)$. Так как последовательность $\{\varphi_i(x)\}$ согласно теореме 3 абсолютно замкнута на E_σ, то для достаточно большого ν существуют линейные комбинации

$$f_j^{(\varepsilon)}(x) = \sum_{i=1}^{\nu} c_{ji}^{(\varepsilon)} \varphi_i(x) \quad (j = 1, 2, \ldots, m)$$

такие, что

$$(28) \qquad |\chi_j^{(\varepsilon)}(x) - f_j^{(\varepsilon)}(x)| < \varepsilon \quad \text{при} \quad x \subset E_\sigma.$$

Положим в (26)

$$(29) \qquad f(x) = \sum_{j=1}^{m} \eta_j f_j^{(\varepsilon)}(x) = \sum_{i=1}^{\nu} \xi_i \varphi_i(x),$$

где ξ_i $(i = 1, 2, \ldots, \nu)$, очевидно, выражаются линейно через переменные η_j $(j = 1, 2, \ldots, m)$. Тогда в силу (26) и (29) получаем

$$(30) \qquad \int_a^b f^2(x)\, d\sigma(x) = \sum_{i=1}^{p} \xi_i^2 - \sum_{i=p+1}^{\nu} \xi_i^2 = \sum_{i,k=1}^{m} a_{ik}^{(\varepsilon)} \eta_i \eta_k,$$

где

$$a_{ik}^{(\varepsilon)} = \int_a^b f_i^{(\varepsilon)}(x) f_k^{(\varepsilon)}(x)\, d\sigma(x) \quad (i, k = 1, 2, \ldots, m).$$

Равенство (30) показывает, что число положительных квадратов квадратичной формы

$$(31) \qquad \sum_{i,k=1}^{m} a_{ik}^{(\varepsilon)} \eta_i \eta_k$$

не превосходит p.

Покажем теперь, что

$$(32) \qquad \lim_{\varepsilon \to 0} a_{ik}^{(\varepsilon)} = \begin{cases} \Delta_k & (i = k), \\ 0 & (i \neq k). \end{cases}$$

В самом деле, в силу (27) и (28) имеем

$$(33) \qquad |f_j^{(\varepsilon)}(x)| < \begin{cases} 1 + \varepsilon & \text{при} \quad x \subset I_j \cdot E_\sigma, \\ \varepsilon & \text{при} \quad x \subset CI_j \cdot E_\sigma \end{cases} \quad (j = 1, 2, \ldots, m),$$

и, следовательно, при $i \neq k$

$$|a_{ik}^{(\varepsilon)}| = \left|\int_a^b f_i^{(\varepsilon)}(x) f_k^{(\varepsilon)}(x)\, d\sigma(x)\right| < \varepsilon(1+\varepsilon)\operatorname{var}\sigma \to 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0.$$

С другой стороны, из (33) следует, что

$$|[f_k^{(\varepsilon)}(x)]^2 - [\chi_k^{(\varepsilon)}(x)]^2| =$$

$$= |f_k^{(\varepsilon)}(x) - \chi_k^{(\varepsilon)}(x)|\,|f_k^{(\varepsilon)}(x) + \chi_k^{(\varepsilon)}(x)| < 2\varepsilon(1+\varepsilon) \quad \text{при} \quad x \subset E_\sigma,$$

и потому

$$\left|\int_a^b [f_k^{(\varepsilon)}(x)]^2\, d\sigma(x) - \int_a^b [\chi_k^{(\varepsilon)}(x)]^2\, d\sigma(x)\right| < 2\varepsilon(1+\varepsilon)\operatorname{var}\sigma.$$

Но

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_a^b [\chi_k^{(\varepsilon)}(x)]^2\, d\sigma(x) = \Delta_k > 0,$$

откуда

$$\lim_{\varepsilon \to 0} a_{kk}^{(\varepsilon)} = \lim_{\varepsilon \to \infty} \int_a^b [f_k^{(\varepsilon)}(x)]^2\, d\sigma(x) = \Delta_k.$$

Доказав равенства (32), мы заключаем, что для достаточно малого $\varepsilon > 0$ число положительных квадратов квадратичной формы (31) равно m и, следовательно, в силу установленного ранее, $m \leqslant p$. Итак, число точек роста $P(x)$ не превосходит p, и теорема доказана.

В заключение нашей статьи сделаем следующее замечание. Мы предполагали в теоремах 1—4, что $K(x, s)$ абсолютно положительно; но читатель, вероятно, заметил, что эти теоремы, равно как и их доказательства, верны, если предположить, что $K(x, s)$ абсолютно положительно только на множестве E_σ, т. е. что для всякой нормированной функции $\tau(x)$ с ограниченным положительным изменением и такой, что $E_\tau \subset E_\sigma$, интеграл

$$\int_a^b \int_a^b K(x, s)\, d\tau(x)\, d\tau(s)$$

положителен.

О РЕГУЛЯРНОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ АБСТРАКТНОЙ ГРУППЫ.

А. А. Кулаков (Москва).

§ 1. Введение. Как известно, многие важные теоремы абстрактной теории групп были установлены с помощью представления абстрактных групп в виде групп обыкновенных или, более общих, линейных подстановок (матриц).

Первым и, может быть, наиболее замечательным результатом в этой области является теорема А. Кэли (Cayley), в силу которой всякая абстрактная группа $\mathfrak{G}$ порядка g изоморфна с транзитивной группой подстановок Γ степени g. Группа Γ называется регулярным представлением группы $\mathfrak{G}$.

Почти непосредственным следствием теоремы Кэли является следующий основной факт теории конечных групп: число неизоморфных между собой групп данного порядка конечно.

Кроме того, эта фундаментальная теорема показывает, что изучение абстрактных групп может быть полностью сведено к изучению групп подстановок. Но эта идея не была до сих пор достаточно полно использована, так как исследование структуры групп подстановок в общем случае также связано с большими трудностями.

Весьма значительных успехов удалось добиться на пути обобщения самого понятия подстановки. Именно, с помощью теории представлений абстрактных групп линейными подстановками и теории характеров[1]), созданной впервые Фробениусом, были доказаны глубокие теоремы о непростоте и разрешимости групп.

Но и в этой области имеется еще несколько нерешенных фундаментальных задач, к числу которых принадлежит и известный вопрос о существовании нормального делителя у групп нечетного составного порядка, поставленный впервые Бернсайдом в 1897 г. Что касается последней задачи, то можно сказать, что до последнего времени мы не имеем никакого определенного подхода к ее решению, несмотря на ряд усилий со стороны выдающихся математиков.

Несомненно, что удачное использование методов современной теории характеров и тем более дальнейшее ее развитие должны привести к установлению новых и глубоких фактов, особенно в отношении таких вопросов, как непростота и разрешимость групп.

Но мне кажется, что значительное внимание должно быть также уделено более детальному изучению свойств представлений абстрактных

[1]) Эти две области тесно связаны между собой и обычно объединяются под общим названием „теории характеров“.

групп обыкновенными подстановками. В частности, мы не имеем еще достаточно подробно разработанной теории регулярного представления.

В своих последних работах я устанавливаю некоторые свойства регулярного представления, которые, повидимому, не были еще замечены. Цель настоящей статьи — дать систематический обзор этих результатов.

§ 2. Пусть $\mathfrak{G}$ — абстрактная группа порядка g и P — элемент простого порядка p группы $\mathfrak{G}$. Обозначим через Γ регулярное представление группы $\mathfrak{G}$. Как известно, группа Γ импримитивна. При этом символы группы Γ (т. е. элементы группы $\mathfrak{G}$) могут быть различными способами разбиты на системы импримитивности.

Рассмотрим то разбиение, которое определяется сопряженными системами

$$\{P\},\quad \{P\}T_2,\quad \{P\}T_3,\quad \ldots,\quad \{P\}T_m$$

разложения $\mathfrak{G}$ по модулю $\{P\}$. Докажем следующую теорему: Если A и B — какие-либо элементы группы $\mathfrak{G}$, причем порядок элемента B равен b, то или все элементы AB^β ($\beta = 0, 1, 2, \ldots, b-1$) принадлежат к различным системам импримитивности, или эти элементы распадаются на несколько систем импримитивности.

Обозначим через

$$\{P\}T_{\nu_1},\quad \{P\}T_{\nu_2},\quad \ldots,\quad \{P\}T_{\nu_s}$$

все различные системы импримитивности, к которым принадлежат элементы AB^β. Если $s=1$ или $s=b$, то наше утверждение верно.

Предположим теперь, что $1<s<b$. Легко видеть, что элементы

$$A,\quad AB,\quad \ldots,\quad AB^{s-1} \tag{1}$$

принадлежат к различным системам импримитивности. Действительно, если бы эти элементы содержались в $s'<s$ системах импримитивности, то к тем же s' системам принадлежали бы и все элементы AB^β ($\beta = 0, 1, 2, \ldots, b-1$), что противоречит предположению.

Таким образом, не нарушая общности рассуждения, можно предполагать, что элемент AB^i ($i = 0, 1, 2, \ldots, s-1$) принадлежит к $\{P\}T_{\nu_{i+1}}$. Тогда элемент AB^s должен входить в $\{P\}T_{\nu_1}$. В самом деле, если бы этот элемент содержался, например, в $\{P\}T_{\nu_2}$, то все элементы $AB^{s+\sigma}$ ($\sigma \geqslant 0$), и в частности A, содержались бы в системах

$$\{P\}T_{\nu_2},\quad \{P\}T_{\nu_3},\quad \ldots,\quad \{P\}T_{\nu_s},$$

что невозможно, так как A заключается в $\{P\}T_{\nu_1}$.

Заметим теперь, что все элементы

$$AB^s,\quad AB^{s+1},\quad \ldots,\quad AB^{2s-1} \tag{2}$$

различны между собой и отличны от элементов (1). Действительно, из равенства

$$AB^{s+\mu} = AB^{s+\nu}\quad (\mu \neq \nu,\ \mu \leqslant s-1,\ \nu \leqslant s-1)$$

следовало бы $B^{\mu-\nu} = E$, что невозможно, так как $\mu - \nu < b$. Допустим, далее, что

$$AB^{s+v} = AB^i\quad (0 \leqslant i,\ v \leqslant s-1).$$

Очевидно, что это могло бы иметь место лишь в том случае, если $v = i$. Но тогда было бы $AB^{s+i} = AB^i$, откуда $B^s = E$, вопреки нашему предположению. Таким образом наше утверждение полностью доказано.

Продолжая рассуждать и дальше подобным образом, докажем, что $b = st$ (t — целое число) и что все элементы

$$A, \quad AB^s, \quad AB^{2s}, \quad \ldots, \quad AB^{(t-1)s}$$

содержатся в системе $\{P\}T_{\nu_1}$.

Заметим теперь, что если бы было $t < p$, т. е. если бы система $\{P\}T_{\nu_1}$ содержала элемент C, отличный от элементов AB^{js} ($j = 0, 1, 2, \ldots, t-1$), то и все элементы CB^{js} ($j = 0, 1. 2 \ldots, t-1$), отличные, очевидно, от элементов AB^{js}, содержались бы в $\{P\}T_{\nu_1}$. Продолжая, если нужно, эти рассуждения, придем к выводу, что $p = tu$ ($t > 1$, $u > 1$), т. е. что p, вопреки предположению,— составное число. Итак, должно быть $t = p$, что и доказывает нашу теорему.

Обозначим, далее, через N нормализатор подгруппы $\{P\}$ в $\mathfrak{G}$. Не нарушая общности, можно предполагать, что разложение N по модулю $\{P\}$ имеет вид

$$N = \{P\} + \{P\}T_2 + \ldots + \{P\}T_n \quad (1 \leqslant n \leqslant m).$$

Пусть (P) — подстановка группы Γ, соответствующая элементу P. Очевидно, что (P) переводит каждую из n систем импримитивности, на которые распадаются элементы N, самое в себя.

Если, кроме того, элементы подгруппы $\{P\}$ не сопряжены между собой и $n < m$, то можно доказать, что все элементы $P^{\alpha}T_{n'}P^i$ ($i = 0, 1, 2, \ldots, p-1$; $n' > n$) принадлежат к различным системам импримитивности. В самом деле, из равенств

$$A_{n'}P^{i_1} = P^{k_1}T_{n''} \quad \text{и} \quad A_{n'}P^{i_2} = P^{k_2}T_{n''} \quad (A_{n'} = P^{\alpha}T_{n'}, \quad i_1 \not\equiv i_2, \quad k_1 \not\equiv k_2)$$

следовало бы

$$P^{-k_1}A_{n'}P^{i_1} = P^{-k_2}A_{n'}P^{i_2},$$

откуда

$$A_{n'}^{-1}P^{k_2-k_1}A_{n'} = P^{i_2-i_1}.$$

Если бы имело место $k_2 - k_1 = i_2 - i_1$, то элемент $A_{n'}$ был бы перестановочен с $P^{i_2-i_1}$, а следовательно, и с P. Но тогда и элемент $T_{n'} = P^{-\alpha}A_{n'}$ был бы перестановочен с P, а это противоречит предположению. Если же $k_2 - k_1 \not\equiv i_2 - i_1$, то были бы сопряжены между собой два различных элемента подгруппы $\{P\}$, также в противоречие с нашим предположением. Утверждение доказано.

Сохраняя предположения только что доказанной теоремы, можно установить еще следующее.

Так как $\{P\}$ — неинвариантная подгруппа группы $\mathfrak{G}$ ($n < m$), то в $\mathfrak{G}$ существует элемент R такой, что

$$R^{-1}\{P\}R = \{P\}' \not\equiv \{P\}.$$

Сопряженные системы

$$\{P\}', \quad \{P\}'T_2', \quad \ldots, \quad \{P\}'T_m'$$

разложения $\mathfrak{G}$ по $\{P\}'$ дают существенно новое разбиение символов Γ на системы импримитивности. При этом можно показать, что никакие два символа группы Γ не могут принадлежать одновременно каким-либо двум системам $\{P\}T_\alpha$ и $\{R^{-1}PR\}T'_{\alpha'}$, относящимся соответственно к первому и второму способу разбиения. В самом деле, из

$$P^{m_1}T_\alpha = R^{-1}P^{n_1}RT'_{\alpha'} \quad \text{и} \quad P^{m_2}T_\alpha = R^{-1}P^{n_2}RT'_{\alpha'}, \quad (m_1 \neq m_2,\ n_1 \neq n_2)$$

следовало бы

$$R^{-1}P^{n_2-n_1}R = P^{m_2-m_1},$$

что невозможно.

Заметим еще, что последний результат можно установить также при помощи следующей известной теоремы [2]): если символы какой-либо транзитивной группы Γ могут быть двумя способами разбиты на системы импримитивности и если r символов группы Γ входят одновременно в две системы, относящиеся к первому и второму способу разбиения, то r делит каждое из чисел m и n, где m — число символов в каждой из систем первого разбиения и n — аналогичное число для второго разбиения. При этом символы Γ можно разбить на системы импримитивности, по r символов в каждой.

В нашем случае мы имеем $m = n = p$, где p — простое число. Если бы, следовательно, число символов, принадлежащих одновременно системе $\{P\}T_\alpha$ и системе $\{R^{-1}PR\}T'_{\alpha'}$, было больше 1, то мы имели бы $r = p$, т. е. эти системы совпадали бы между собой. Но тогда, в силу транзитивности группы Γ, совпадали бы и все остальные системы, относящиеся к рассматриваемым разбиениям, что противоречит предположению.

Отметим еще следующее свойство систем $\{R^{-1}PR\}T'_{\alpha'}$ „второго разбиения“. Или все символы каждой из этих систем принадлежат к различным циклам подстановки (P) или они входят в один и тот же цикл этой подстановки. При этом число тех систем, символы которых принадлежат к различным циклам (P), равно $\frac{g-np}{p}$, где np — порядок нормализатора подгруппы $\{P\}$ относительно $\mathfrak{G}$.

§ 3. Мы установили выше различные свойства подстановок группы Γ, связанные с ее импримитивностью. Исследуем теперь некоторые свойства группы Γ, связанные непосредственно с регулярностью этой группы.

Пусть P и Q — элементы группы $\mathfrak{G}$, причем порядок элемента P есть простое число p, и P не является степенью Q. Подстановки группы Γ, соответствующие этим элементам, будем обозначать ради краткости также через P и Q.

Рассмотрим теперь подстановки Q и $Q^{-\gamma}P^sQ^\gamma$ $(s = 1, 2, \ldots, p-1;\ \gamma = 0, 1, 2, \ldots, k-1;\ k$ — порядок $Q)$. Можно доказать, что никакие два символа группы Γ не могут принадлежать одновременно какому-либо циклу подстановки Q и какому-либо циклу подстановки $Q^{-\gamma}P^sQ^\gamma$. В самом деле, в противном случае мы имели бы, в силу регулярности Γ,

$$Q^\alpha = (Q^{-\gamma}P^sQ^\gamma)^\beta = Q^{-\gamma}P^{s\beta}Q^\gamma,$$

---

[2]) W. Burnside, Theory of groups of finite order (1911), стр. 195.

откуда $Q^{\alpha} = P^{s\beta}$. Но так как p — простое число, то из предыдущего равенства следует $Q^{\alpha\gamma} = P$ (γ — некоторое целое число), вопреки предположению. Утверждение, таким образом, доказано.

Если, кроме того, элементы P и Q не перестановочны, а элементы подгруппы $\{P\}$ не сопряжены между собой, то легко показать, что подстановки P и $Q^{-1}P^sQ$ обладают тем же свойством, что и рассмотренные выше подстановки Q и $Q^{-\gamma}P^sQ^{\gamma}$.

Обозначим, далее, через S и T какие-либо две подстановки группы Γ. Используя опять регулярность группы Γ, легко установим следующую теорему: или все символы какого-либо цикла подстановки S принадлежат к различным циклам подстановки T, или же символы группы Γ, которые входят одновременно в два цикла, принадлежащие соответственно подстановкам S и T, располагаются в каждом из этих циклов на равных расстояниях друг от друга.

Наконец, известно, что все циклы какой-либо подстановки группы Γ содержат одно и то же число символов.

§ 4. В предыдущих параграфах было установлено, что подстановки группы Γ обладают многими, и притом различного характера, свойствами. Естественным образом возникает мысль, что все эти условия могут выполняться лишь при наличии значительных правильностей в структуре подстановок регулярного представления.

Мы приведем здесь некоторые примеры, подтверждающие это предположение для отдельных групп.

Рассмотрим сначала группу $\mathfrak{G}_{75}$ порядка 75, порождаемую подстановками [3])

$$P = (1, 2, 3)\ (4, 5, 6)\ \ldots\ (73, 74, 75)$$

и

$$Q = (1, 4, 7, 10, 13)\ (16, 19, 22, 25, 28)\ \ldots\ (61, 64, 67, 70, 73) \times$$
$$\times (2, 74, 56, 38, 20)\ (17, 14, 71, 53, 35)\ \ldots\ (62, 59, 41, 23, 5) \times$$
$$\times (3, 18, 33, 48, 63)\ (15, 30, 45, 60, 75)\ \ldots\ (51, 66, 6, 21, 36).$$

Цифры, принадлежащие к различным циклам, встречающимся в одной и той же строке подстановки Q, и занимающие в этих циклах одни и те же места, образуют арифметические прогрессии по модулю 75 [4]).

Рассмотрим еще группу $\mathfrak{G}_{81}$ порядка 81, определяемую равенствами [5])

$$P^9 = E,\quad Q^3 = E,\quad Q^{-1}PQ = P^4,\quad R^{-1}PR = PQ,\quad R^{-1}QR = Q,\quad R^3 = E.$$

Легко видеть, что группа $\mathfrak{G}_{81}$ может быть порождена подстановками $R = P'$ и $P = Q'$.

При этом можно убедиться, что при надлежащей нумерации символов группы Γ подстановки P' и Q' принимают вид

$$P' = (1, 2, 3)\ (4, 5, 6)\ \ldots\ (79, 80, 81)$$

---

[3]) F. N. Cole and J. W. Glower, On groups whose orders are products of three prime factors, Amer. Journ. of Math., т. 15 (1893), стр. 208. Наши подстановки P и Q получены из подстановок u и s указанной статьи простым изменением способа нумерации символов.

[4]) Так как мы не пользуемся цифрой 0, то нужно приводить по модулю 75 лишь те цифры, которые *больше* 75.

[5]) W. Burnside, Theory of groups of finite order (1911), стр. 145.

$V' = (1, 4, 7, 10, \ldots, 25)\,(28, 31, 34, 37, \ldots, 52)\,(55, 58, 61, 64, \ldots, 79) \times$
$\times (2, 77, 35, 11, 59, 44, 20, 68, 53)\,(29, 23, 62, \ldots, 80)\,(56, 50, 8, \ldots, 26) \times$
$\times (3, 42, 63, 12, 51, 72, 21, 33, 81)\,(30, 69, 9, \ldots, 27)\,(57, 15, 36, \ldots, 54).$

Мы видим, таким образом, что в структуре подстановок, с помощью которых может быть представлена группа $\mathfrak{G}_{81}$, имеются особенности того же характера, как и в случае группы $\mathfrak{G}_{75}$, хотя эти две группы, рассматриваемые абстрактно, существенно отличаются друг от друга.

Вопрос о наличии аналогичных закономерностей в структуре подстановок регулярного представления произвольной группы остается открытым. Для того чтобы выяснить этот вопрос, нужно будет преодолеть ряд значительных трудностей.

ТЕОРЕМА ЖОРДАНА-ГЕЛЬДЕРА В ПРОИЗВОЛЬНЫХ СТРУКТУРАХ.

А. Г. Курош (Москва).

1. Ведущая свое начало от Дедекинда и привлекшая за последние годы внимание весьма широких математических кругов *теория структур* имеет дело — если говорить лишь о связях с теорией групп, что далеко не исчерпывает области применимости этой богатой теории — с теми теоретико-групповыми понятиями и фактами, которые зависят лишь от частичной упорядоченности подгрупп в группе, т. е. могут быть определены или доказаны с помощью операций перемножения и пересечения подгрупп. Оказалось, что к теории структур относятся многие теоретико-групповые теоремы, например, теорема Ремака-Шмидта [1]). Еще Дедекинду [2]) было известно, что и теорема об инвариантности длин главных рядов группы может быть доказана без применения групповой операции. В настоящей работе будет показано, что теорема Жордана-Гельдера для композиционных рядов также не является по существу теоретико-групповой теоремой и может быть перенесена на произвольные структуры.

Излагающиеся здесь результаты были получены мною весной 1935 г. и докладывались тогда же в Московском математическом обществе, но не были сданы в печать ввиду получения мною от О. Оре сообщения об аналогичных полученных им результатах. Опубликованная в текущем году работа Оре [3]) заметно отличается, однако, от моей по своим методам, и поэтому я с радостью пользуюсь возможностью опубликовать свои результаты в сборнике, посвященном юбилею академика Д. А. Граве.

2. Множество S называется *структурой*, если в нем определены две операции, однозначно ставящие в соответствие всяким двум элементам a, b из S их *сумму* $a+b$ и их *пересечение* ab, и если эти операции подчинены следующим условиям:

I. $a+b=b+a$	$ab=ba$
II. $a+(b+c)=(a+b)+c$	$a(bc)=(ab)c$
III. $a+a=a$	$aa=a$

IV. Если $a+b=a$, то $ab=b$, и обратно.

---

[1]) См. O. Ore, On the foundation of abstract algebra II, Ann. of Math., т. 37 (1936), стр. 265—292.

[2]) R. Dedekind, Über Zerlegungen von Zahlen durch ihre grössten gemeinsamen Teiler, Festschrift Techn. Hochschule, Braunschweig, 1897; Werke, Bd. 2.

[3]) O. Ore, On the theorem of Jordan-Hölder, Trans. Amer. Math. Soc., т. 41 (1937), стр. 266—275.

Легко видеть, что множество всех подгрупп некоторой группы образует структуру при обычных операциях умножения и пересечения подгрупп. Аналогичный факт имеет место и для множества нормальных делителей группы.

Если элементы a и b удовлетворяют условиям $a+b=a$ и $a \neq b$, то употребляется обозначение $a>b$ (a „больше“ b, a „содержит“ b, a „следует“ за b). Отношение „больше“ является транзитивным, поэтому структуру S можно считать частично упорядоченным множеством. Символы $\geqslant$, $<$, $\leqslant$ определяются обычным образом.

Определение структуры можно было бы дать, считая исходным понятием отношение упорядоченности, а не операции.

На основании аксиом I — IV легко получаются следующие свойства отношения $>$ (a, b, c — произвольные элементы структуры):

1) $ab \leqslant a$,	$a+b \geqslant a$,
2) из $a \leqslant b$, $a \leqslant c$ следует $a \leqslant bc$,	из $a \geqslant b$, $a \geqslant c$ следует $a \geqslant b+c$,

3) из $a \leqslant b$ следует $ac \leqslant bc$ и $a+c \leqslant b+c$.

Структуры S_1 и S_2 называются *изоморфными*, если существует взаимно однозначное отображение одной из них на другую, сохраняющее структурные операции и, следовательно, упорядоченность.

Подмножество S' структуры S называется *подструктурой*, если оно замкнуто по отношению к структурным операциям. Так, если $a<b$, то все элементы x, лежащие между a и b, т. е. удовлетворяющие условию $a \leqslant x \leqslant b$, образуют подструктуру, которая обозначается $b|a$. Подструктуру образуют, далее, все элементы, предшествующие некоторому элементу a, равно как и все элементы, следующие за a (со включением в обоих случаях самого a).

3. Структура S называется *дедекиндовой*, если она обладает следующим свойством:

Если a, a' и b — произвольные элементы структуры, удовлетворяющие условиям $a \leqslant a'$, $a+b=a'+b$ и $ab=a'b$, то $a=a'$.

Известно, что структура всех нормальных делителей некоторой группы является дедекиндовой. Структура всех подгрупп уже не является, вообще говоря, дедекиндовой, как показывает пример знакопеременной группы четвертой степени.

В произвольной структуре S могут быть выделены элементы, играющие роль нормальных делителей в структуре подгрупп. Мы будем делать это следующим образом:

Элемент a будет называться нормальным в структуре S, если при произвольном элементе b и элементах b', c, c', удовлетворяющих условиям

$$b \leqslant b' \leqslant a+b, \quad a \leqslant c \leqslant c' \leqslant a+b,$$

из $bc=b'c'$ следует $b=b'$, $c=c'$.

Если a содержится в некотором элементе d и обладает указанным в определении нормального элемента свойством по отношению ко всякому b, также содержащемуся в d, то элемент *a нормален в d.*

Иными словами, элемент a нормален в d, если он нормален в подструктуре, составленной из элементов, предшествующих d. Понятно, что элемент, нормальный в d, может уже не быть нормальным в элементе d, большем, чем d.

В дедекиндовых структурах и только в них все элементы являются нормальными.

Нормальный делитель некоторой группы является нормальным элементом в структуре подгрупп этой группы.

Действительно, пусть A — нормальный делитель группы G и пусть подгруппы B, B', C, C' группы G удовлетворяют условиям

$$B \subseteqq B' \subseteqq AB, \quad A \subseteqq C \subseteqq C' \subseteqq AB,$$
$$B \cap C = B' \cap C'.$$

Всякий элемент b' из B' имеет вид $b' = ab$, где $a \in A$, $b \in B$. Отсюда $a = b'b^{-1}$, т. е. a содержится в пересечении подгрупп A и B' и тем более в пересечении подгрупп C' и B'. Но это пересечение совпадает, по условию, с $B \cap C$, поэтому a содержится в B, а тогда и b' входит в B, т. е. $B' = B$.

Далее, всякий элемент c' из C' имеет вид $c' = a_1 b_1$, где $a_1 \in A$, $b_1 \in B$. Отсюда $b_1 = c' a_1^{-1}$, т. е. b_1 содержится в пересечении подгрупп B и C', поэтому в пересечении подгрупп B' и C', а тогда и в $B \cap C$, т. е. b_1 входит в C. Отсюда следует, что c' содержится в C, т. е. $C' = C$.

Заметим, что утверждение, обратное доказанному, не имеет места, как показывает пример симметрической группы третьей степени, обладающей дедекиндовой структурой подгрупп.

4. Лемма 1. *Если элемент a нормален в структуре S, а содержащий его элемент $\bar{a}$ нормален в подструктуре S', составленной из элементов, следующих за a, то $\bar{a}$ является нормальным элементом структуры S.*

Доказательство. Пусть в S существуют такие элементы b, b', c и c', что

$$b \leqslant b' \leqslant \bar{a} + b, \quad \bar{a} \leqslant c \leqslant c' \leqslant \bar{a} + b$$

и

$$bc = b'c' = d.$$

Обозначим $a + b = \bar{b}$, $a + b' = \bar{b}'$. Тогда $\bar{a} + \bar{b} = \bar{a} + b$ и $\bar{b} \leqslant \bar{b}' \leqslant \bar{a} + b$. Покажем, что пересечение $\bar{b}'c'$ равно пересечению $\bar{b}c$. Действительно, эти пересечения удовлетворяют неравенствам

$$a \leqslant \bar{b}c \leqslant \bar{b}'c' \leqslant a + b'$$

и пересечения их обоих с b' равны d, т. е. совпадают. Отсюда следует, ввиду нормальности элемента a, что $\bar{b}c = \bar{b}'c'$. Это позволяет использовать нормальность элемента $\bar{a}$ в S', и мы получаем, что

$$c = c' \quad \text{и} \quad \bar{b} = \bar{b}'.$$

Остается доказать, что $b = b'$. Из $\bar{b} = \bar{b}'$ следует $b' \leqslant a + b$. Однако $ab = abc = ad$ и $ab' = ab'c' = ad$, т. е. $ab = ab'$. Поэтому, снова ввиду нормальности элемента a, будет $b = b'$.

Лемма 2. *Сумма двух нормальных элементов структуры сама нормальна в этой структуре.*

Доказательство. Пусть a_1 и a_2 — нормальные элементы структуры S. В силу леммы 1 для установления нормальности элемента $\bar{a} = a_1 + a_2$ достаточно доказать его нормальность в структуре S', составленной из элементов, следующих за нормальным элементом a_1. Мы принимаем, следовательно, что существуют элементы b, b', c и c', содержащие элемент a_1 и удовлетворяющие условиям

$$b \leqslant b' \leqslant \bar{a} + b, \quad \bar{a} \leqslant c' \leqslant c' \leqslant \bar{a} + b$$

и

$$bc = b'c'.$$

Так как $a_1 \leqslant b$, то мы получаем

$$\bar{a} + b = a_1 + a_2 + b = a_2 + b,$$

откуда следует

$$a_2 \leqslant c \leqslant c' \leqslant a_2 + b.$$

Нормальность элемента a_2 приводит поэтому к равенствам

$$b = b', \quad c = c'.$$

Заметим, что аналогичная теорема для пересечений нормальных элементов не будет, вообще говоря, справедливой, как легко показать на примерах.

Лемма 3. *Пересечение нормального элемента a и некоторого элемента a' нормально в a'.*

Доказательство. Пусть $aa' = d$ и пусть существует такой элемент b, $b < a'$, и такие элементы b', c, c', что

$$b \leqslant b' \leqslant d + b, \quad d \leqslant c \leqslant c' \leqslant d + b$$

и

$$bc = b'c'.$$

Из $d \leqslant a$ следует

$$b' \leqslant a + b.$$

Докажем сейчас, что пересечения элемента b и b' с a совпадают, а именно равны пересечению b и d. Действительно,

$$ab \leqslant aa' = d, \quad \text{т. е.} \quad ab \leqslant db,$$

обратное же неравенство очевидно; поэтому $ab = db$. Далее, $ab' \leqslant d$, поэтому

$$ab' \leqslant db' \leqslant cb' = cb,$$

откуда

$$ab' \leqslant cbd = bd.$$

Так как обратное неравенство снова очевидно, то мы получаем, что $ab' = db$, и поэтому

$$ab = ab'.$$

Ввиду нормальности элемента a мы получаем, что $b = b'$.

Легко видеть, далее, что элементы $a + c$ и $a + c'$ удовлетворяют условию

$$a \leqslant a + c \leqslant a + c' \leqslant a + d + b = a + b.$$

Покажем, что пересечения этих элементов с b совпадают. Заметим сперва, что $(a + c)\, a' = c$. Действительно, эти элементы связаны неравенством $c \leqslant (a + c)\, a'$ и, как легко проверить, они имеют общее пересечение и сумму с a, а поэтому, ввиду нормальности a, совпадают. Теперь

$$(a + c)\, b = (a + c)\, ba' = bc.$$

Аналогичным путем получается

$$(a + c')\, b = bc,$$

откуда, снова ввиду нормальности элемента a, следует

$$a + c = a + c',$$

т. е. $c' \leqslant a + c$.

Равенство

$$ac = ac' = d$$

позволяет еще раз воспользоваться нормальностью элемента a и получить $c = c$, чем заканчивается доказательство леммы.

Следующая лемма является аналогом так называемой *первой теоремы об изоморфизмах* в теории групп.

Лемма 4. *Если a — нормальный и b — произвольный элемент структуры S, то подструктуры $(a + b)|a$ и $b|ab$ изоморфны.*

Доказательство. Всякому элементу c из $b|ab$ мы ставим в соответствие элемент $a + c$, принадлежащий, очевидно, к подструктуре $(a + b)|a$. Покажем, что это отображение есть искомый изоморфизм.

Пусть в $b|ab$ существует такой элемент c', что $a + c' = a + c$. Тогда и $a + (c + c') = a + c$. Если c и c' отличны друг от друга, то их сумма будет отличной хотя бы от одного из них, например отличной от c. Мы имеем, следовательно,

$$c < c + c' \leqslant a + c.$$

Но $ac = ab$ и $a(c + c') = ab$, так как $c + c' \geqslant ab$, поэтому

$$ac = a(c + c'),$$

что противоречит нормальности элемента a. Это показывает, что установленное нами отображение переводит различные элементы подструктуры $b|ab$ в различные же элементы из $(a + b)|a$. Теперь следует показать, что при этом отображении будут использованы все элементы из $(a + b)|a$.

Пусть d принадлежит к $(a + b)|a$. Тогда

$$d = a + bd,$$

где bd принадлежит, очевидно, к $b|ab$. Действительно, если

$$a + bd < d,$$

то мы приходим к противоречию с нормальностью элемента a ввиду соотношений

$$a \leqslant a + bd < d \leqslant a + b$$

и

$$(a + bd)\, b = db.$$

Этим доказана взаимная однозначность отображения. Изоморфизм следует из того, что наше отображение сохраняет упорядоченность элементов.

5. Структура S может обладать *нулевым элементом* 0 и *единичным элементом* 1, которые определяются следующим образом: для всякого элемента a из S имеют место неравенства

$$0 \leqslant a, \quad a \leqslant 1.$$

В структуре подгрупп некоторой группы роль нуля играет единичная подгруппа, роль единицы — вся группа. Легко видеть, что 0 и 1 являются нормальными элементами структуры S. Структура, обладающая нулем и единицей и не имеющая никаких других нормальных элементов, будет называться *простой*.

Дальше будут рассматриваться лишь структуры, обладающие нулем и единицей. Упорядоченное конечное множество элементов из S

$$1 = a_0 > a_1 > a_2 > \ldots > a_k = 0$$

называется *нормальным рядом* структуры S, если всякое a_i нормально в a_{i-1} $(i = 1, 2, \ldots, k)$. Если a_i является, сверх того, максимальным нормальным элементом в a_{i-1}, то этот нормальный ряд называется *композиционным рядом*.

Число k есть *длина* нормального ряда. Подструктуры $a_{i-1}|a_i$ $(i = 1, 2, 3, \ldots, k)$ называются *факторами* нормального ряда; все факторы композиционного ряда являются, в силу леммы 1, простыми.

Понятно, что не всякая структура обладает композиционным рядом. Нормальным же рядом структуры будет, например, ряд $1 > 0$.

6. Леммы 1—4 позволяют дословно перенести в теорию структур теорию нормальных и композиционных рядов групп (см. Ван-дер-Варден, Современная алгебра, ч. I, § 41). Лишь ради полноты мы воспроизводим здесь коротко эти, идущие от Шрейера, рассмотрения.

Два нормальных ряда называются *изоморфными*, если они имеют одинаковую длину и если между их факторами можно установить такое взаимно однозначное соответствие, что соответствующие будут изоморфными. Один нормальный ряд называется *уплотнением* другого, если все элементы, составляющие второй ряд, входят и в первый. Легко видеть, что для всякого уплотнения одного из двух изоморфных нормальных рядов можно построить изоморфное ему уплотнение второго ряда.

Теорема. *Два любых нормальных ряда структуры обладают изоморфными уплотнениями.*

Заметим, что в процессе доказательства нам будут встречаться нормальные ряды с *повторениями*, т. е. ряды, в которых несколько идущих подряд элементов могут оказаться равными.

Доказательство. Пусть в структуре S даны нормальные ряды

(1) $$1 > a_1 > a_2 > \ldots > a_k = 0,$$

(2) $$1 > b_1 > b_2 > \ldots > b_l = 0,$$

имеющие длины k и l. При $k = 1$ или $l = 1$ теорема очевидна. Полагаем $l = 2$, т. е. считаем, что второй ряд имеет вид

$$1 > b > 0,$$

и ведем доказательство индукцией по k.

Элемент $d = a_1 b$ нормален в a_1 и в b на основании леммы 3. Ряды

$$a_1 > a_2 > \ldots > a_k = 0 \quad \text{и} \quad a_1 \geqslant d \geqslant 0$$

являются нормальными и обладают, по предположению, изоморфными уплотнениями

(3) $$a_1 \geqslant \ldots \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant 0,$$

(4) $$a_1 \geqslant \ldots \geqslant d \geqslant \ldots \geqslant 0.$$

Берем элемент $c = a_1 + b$, который, по лемме 2, нормален в S. По лемме 4 подструктуры c/a_1 и b/d (равно как и c/b и a_1/d) изоморфны между собою, поэтому изоморфны нормальные ряды

(5) $$c \geqslant a_1 \geqslant d \geqslant 0,$$

(6) $$c \geqslant b \geqslant d \geqslant 0.$$

Нормальный ряд (4) приводит к некоторому уплотнению ряда (5), что позволяет устроить изоморфное ему уплотнение для (6). Это дает, при использовании изоморфизма рядов (3) и (4), два изоморфных уплотнения для заданных первоначально нормальных рядов.

Оканчивается доказательство индукцией по l. Сперва устраиваются изоморфные уплотнения для рядов (1) и $1 \geqslant b_1 \geqslant 0$. Из полученного этим путем уплотнения ряда $1 \geqslant b_1 \geqslant 0$ берем отрезок $b_1 \geqslant \ldots \geqslant 0$ и ищем изоморфные уплотнения для него и для ряда

$$b_1 \geqslant b_2 \geqslant \ldots \geqslant b_l = 0,$$

являющегося отрезком ряда (2). Существование таких уплотнений следует из предположения индукции о справедливости теоремы для $l - 1$. Отсюда следует, наконец, справедливость теоремы в общем случае.

Полученные изоморфные уплотнения рядов (1) и (2) обладают, вообще говоря, повторениями. Изоморфизм этих уплотнений позволяет, однако, одновременно исключить повторения в обоих рядах: фактор, соответствующий двум одинаковым элементам ряда, является подструктурой, состоящей из одного элемента.

Из этой теоремы непосредственно следует аналог теоремы Жордана-Гельдера:

Если структура S обладает композиционными рядами, то всякие два ее композиционных ряда изоморфны между собой.

О ПРОДОЛЖАЕМЫХ ПОЛИНОМАХ II. ОБ R-ПРОДОЛЖАЕМЫХ ПОЛИНОМАХ.

Н. Н. Мейман (Харьков).

Введение. Проблема R-продолжаемых полиномов, поставленная проф. Н. Г. Чеботаревым, состоит в следующем:

Найти необходимые и достаточные условия, которым должны удовлетворять $n+1$ вещественных чисел $1, a_1, \ldots, a_n$ для того, чтобы существовал полином с вещественными корнями, для которого эти числа служили бы $n+1$ младшими коэфициентами (т. е. коэфициентами при $z^0, z^1, \ldots, z^n$).

Систему чисел, для которых существует такой полином, будем называть R-продолжаемой.

Несколько ниже станет ясным, что эта проблема по существу является некоторой проблемой моментов, но с усложняющим решение добавочным условием, что веса принимают только целые положительные значения.

Проблема разбивается на три задачи:

I. Нахождение критерия R-продолжаемости.

II. В случае, когда система R-продолжаема, — определение наименьшей степени полиномов, осуществляющих R-продолжаемость, т. е. полиномов вида $1+a_1z+\ldots+a_nz^n+a_{n+1}z^{n+1}+\ldots+a_mz^m$, все корни которых вещественны.

III. Построение таких полиномов.

Так как решение проблемы имеет чисто алгоритмический характер, то задачи II и III войдут как составная часть в решение задачи I и их не придется отдельно рассматривать.

Решение опирается на введенное мною понятие квазидискриминантной поверхности, являющееся обобщением понятия дискриминантной поверхности.

Теоремы 1 и 2 в менее точных формулировках, а также решение для $n=2$ и 3 были одновременно получены Н. Г. Чеботаревым и мной. Первоначальная мысль о геометризации проблемы принадлежит Н. Г. Чеботареву, решившему также задачу для случая $n=2$ чисто геометрически с помощью огибающих семейств кривых $s_1=t+m\tau$, $s_2=t^2+m\tau^2$.

§ 1. Основные положения и решение задачи для $n=2$ и $n=3$.

Определение. Полином

$$1+a_1z+\ldots+a_nz^n$$

с вещественными коэфициентами называется *R-продолжаемым*, если существует полином $\varphi(z)$ вида

$$\varphi(z) = 1 + a_1 z + \ldots + a_n z^n + b_1 z^{n+1} + \ldots + b_m z^{n+m},$$

все корни которого вещественны.

Пусть $\varphi(z)$ — произвольный полином с фиксированными первыми $n+1$ членами,

$$\varphi(z) = 1 + a_1 z + \ldots + a_n z^n + \ldots$$

Первые n коэфициентов разложения взятой с обратным знаком логарифмической производной полинома $\varphi(z)$:

$$-\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} = s_1 + s_2 z + \ldots + s_n z^{n-1} + \ldots$$

вычисляются с помощью известных формул Ньютона

$$\begin{aligned} &s_1 + a_1 = 0, \\ &s_2 + s_1 a_1 + 2a_2 = 0, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &s_n + s_{n-1} a_1 + s_{n-2} a_2 + \ldots + n a_n = 0 \end{aligned}$$

и, следовательно, вполне определяются величинами $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Если полином $1 + a_1 z + \ldots + a_n z^n$ R-продолжаем, то существует полином $\varphi(z)$, все корни которого вещественны. Если $t_1, t_2, \ldots, t_{n+m}$ — величины, обратные его корням, то $s_i = \sum_{\nu=1}^{n+m} t_\nu^i$. Из этого следует, что проблему можно формулировать так:

Каковы необходимые и достаточные условия, при соблюдении которых n вещественных чисел $s_1, s_2, \ldots, s_n$ представляются в виде сумм степеней какого-нибудь числа одних и тех же для всех s вещественных величин t:

$$s_i = \sum_\nu t_\nu^i ? \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Эти условия заключаются в некоторых системах неравенств. Для дальнейшего основное значение имеет то обстоятельство, что когда неравенства выполняются *в сильном смысле*, т. е. не имеют места равенства, то величина s_1 не влияет на решение вопроса. Точнее это можно сформулировать так:

Теорема 1. *Если величины $s_2, s_3, \ldots, s_n$ представляются в виде соответствующих степенных сумм вещественных параметров:*

$$s_i = \sum_\nu t_\nu^i \quad (i = 2, 3, \ldots, n),$$

причем среди величин t_ν не менее $n-1$ отличных друг от друга и от нуля, то при произвольном s_1 величины $s_1, s_2, \ldots, s_n$ тоже можно представить в виде степенных сумм некоторых вещественных параметров.

Доказательство. Пусть

$$s_2 = t_1^2 + \ldots + t_{n-1}^2 + \ldots + t_k^2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$s_n = t_1^n + \ldots + t_{n-1}^n + \ldots + t_k^n,$$

где все t вещественны, $k \geqslant n-1$ и $t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}$ различны между собой и все отличны от нуля.

Закрепив параметры $t_n, \ldots, t_k$, эти соотношения можно рассматривать как уравнения относительно $t_1, \ldots, t_{n-1}$. Так как якобиан системы равен $n!\, t_1 \ldots t_{n-1}\, W(t_1, \ldots, t_{n-1}) \neq 0$ [1]), то эти уравнения определяют алгебраические, вещественные в окрестности точки $(s_2, \ldots, s_n)$ функции

$$t_j = \varphi_j(s_2, \ldots, s_n) \quad (j = 1, 2, \ldots, n-1).$$

Из этого следует, что для любого s_1 можно определить такие достаточно большое целое m, вещественное α и достаточно близкие к $t_1, \ldots, t_{n-1}$ вещественные величины $t'_1, \ldots, t'_{n-1}$, что

$$s_1 = t'_1 + \ldots + t'_{n-1} + t_n + \ldots + t_k + m\left(\frac{\alpha}{m}\right),$$
$$s_2 = t'^2_1 + \ldots + t'^2_{n-1} + t_n^2 + \ldots + t_k^2 + m\left(\frac{\alpha}{m}\right)^2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$s_n = t'^n_1 + \ldots + t'^n_{n-1} + t_n^n + \ldots + t_k^n + m\left(\frac{\alpha}{m}\right)^n.$$

Действительно, последние $n-1$ уравнений дают

$$t'_j = \varphi_j\left(s_2 - \frac{\alpha^2}{m}, \ \ldots, \ s_n - \frac{\alpha^n}{m^{n-1}}\right) \quad (j = 1, 2, \ldots, n-1).$$

Подставив эти значения в первое уравнение, получим уравнение относительно α

$$s_1 - t_n - \ldots - t_k = \sum_{j=1}^{n-1} \varphi_j\left(s_2 - \frac{\alpha^2}{m}, \ \ldots, \ s_n - \frac{\alpha^n}{m^{n-1}}\right) + \alpha,$$

которое при достаточно большом m, очевидно, имеет вещественное решение.

С небольшим изменением метода доказывается следующее, тоже основное для дальнейшего, предложение:

Теорема 2. *Если величины $s_3, s_4, \ldots, s_n$ представляются в виде соответствующих степенных сумм:*

$$s_j = \sum_{\nu=1}^{k} t_\nu^j \quad (j = 3, 4, \ldots, n),$$

---

[1]) Символом $W(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ здесь и в дальнейшем обозначается определитель Вандермонда от $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$.

причем среди величин t_v имеется не менее $n-3$ отличных друг от друга и от нуля, то s_2, s_3, ..., s_n тоже представляются в виде степенных сумм вещественных параметров, при условии, что

$$s_2 \geqslant t_1^2 + \ldots + t_k^2.$$

Модификация доказательства состоит в том, что в системе

$$s_j = t_1^j + \ldots + t_{n-3}^j + 0^j + t_{n-2}^j + \ldots + t_k^j \quad (j = 3, 4, \ldots, n)$$

закрепляются параметры $t_{n-2}, \ldots, t_k$ и затем делается замена $t_i^3 = u_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n-3)$. Система заменится новой:

$$s_j = u_1^{j/3} + \ldots + u_{n-3}^{j/3} + u_{n-2}^{j/3} + t_{n-2}^j + \ldots + t_k^j$$
$$(u_{n-2} = 0,\ j = 3, 4, \ldots, n).$$

Якобиан этой системы равен $\frac{n!}{2 \cdot 3^{n-2}} W(u_1^{1/3}, \ldots, u_{n-3}^{1/3}, u_{n-2}^{1/3}) \neq 0$. Дальше рассуждаем как при доказательстве теоремы 1. Так как уравнение $t_j^3 = u_i$ при вещественном u_i всегда имеет вещественный корень, то все доказано.

С помощью двух этих предложений непосредственно получаются решения для $n = 2$ и $n = 3$.

В первом случае условие продолжаемости состоит в неравенстве

$$s_2 > 0.$$

Необходимость этого условия очевидна, а достаточность следует из теоремы 1, так как положительное число s_2 можно представить в виде квадрата вещественного числа.

Во втором случае необходимое условие

$$s_2^3 \geqslant s_3^2$$

является, в случае когда имеет место неравенство, также и достаточным. Действительно, пусть $s_3 = t^3$. Тогда $s_2 > t^2$, и по теореме 2 s_2 и s_3 можно представить в виде $s_2 = t_1^2 + mt_2^2$, $s_3 = t_1^3 + mt_2^3$. Теперь применяем теорему 1. Если имеет место знак равенства: $s_2^3 = s_3^2$, то задача имеет решение лишь при $s_2 = s_1^2$, $s_3 = s_1^3$, так как из полиномов со всеми вещественными корнями только для полиномов вида $1 + tz$ (напоминаю, что s_i здесь — сумма $(-i)$-х степеней корней полинома) выполняется равенство $s_2^3 = s_3^2$.

Условимся раз навсегда, что все параметры t, τ, u, v, α, с которыми придется встречаться в дальнейшем, вещественны, а p, q — числа натурального ряда.

Под выражением „уравнение (или система уравнений) невозможно“ будем понимать то, что это уравнение (или система) не имеет вещественных решений.

§ 2. Исследование решения для $n = 2$. Квазидискриминантные поверхности. Разберем подробно самый простой случай $n = 2$. Если

кривую $s_1 = t$, $s_2 = t^2$ параллельно переносить вдоль самой себя, т. е. заставить ее вершину скользить по такой же кривой, то подвижная кривая опишет ту часть плоскости (s_1, s_2), координаты точек которой представимы в виде степенных сумм двух параметров:

(2,1) $$s_1 = t + \alpha, \quad s_2 = t^2 + \alpha^2.$$

Можно (2,1) рассматривать как уравнения семейства кривых с α в качестве параметра. Уравнение огибающей семейства будет $s_1 = 2t$, $s_2 = 2t^2$. Так как кривая $s_1 = t$, $s_2 = t^2$ выпуклая и каждая кривая семейства (2,1) лежит внутри огибающей этого семейства, то область плоскости (s_1, s_2), координаты точек которой представимы с помощью степенных сумм не более двух параметров, ограничена кривою $s_1 = 2t$, $s_2 = 2t^2$. Обратно, координаты любой точки, лежащей внутри этой кривой (внутренней назовем ту область, где лежит ось s_2), представляются в виде степенных сумм двух параметров. Повторяя это рассуждение, найдем, что область, координаты точек которой представимы в виде $s_1 = \sum_{\nu=1}^{m} t_\nu$, $s_2 = \sum_{\nu=1}^{m} t_\nu^2$, состоит из части плоскости (s_1, s_2), лежащей внутри кривой $s_1 = mt$, $s_2 = mt^2$. Кривые $s_1 = mt$, $s_2 = mt^2$ (m пробегает ряд натуральных чисел, начиная с 2) разобьют всю верхнюю полуплоскость $s_2 > 0$ на зоны, причем координаты точек зоны, лежащей между кривыми $s_1 = mt$, $s_2 = mt^2$ и $s_1 = (m+1)t$, $s_2 = (m+1)t^2$, представляются в виде степенных сумм не менее $m+1$ параметров. Следовательно, если точка (s_1, s_2) лежит в такой зоне, то минимальная степень полинома, реализующего R-продолжение, равна $m+1$.

Соображения, столь ясные и простые при $n = 2$, в общем случае сильно усложняются, но тем не менее оказывается выгодным ввести следующее понятие.

Рассмотрим в n-мерном пространстве $(s_k, s_{k+1}, \ldots, s_{k+n-1})$ замкнутое многообразие $A_m(s_k, \ldots, s_{k+n-1})$, координаты точек которого представимы в виде

$$s_i = \sum_{\nu=1}^{m} t_\nu^i \quad (m \geqslant n,\ i = k,\ k+1,\ \ldots,\ k+n-1).$$

Очевидно, что если среди t_ν имеются n отличных друг от друга и от нуля, то такая точка является внутренней для этого многообразия. Если k нечетно, то достаточно даже, чтобы среди t_ν было n различных между собой, считая нуль равноправным значением (полагаем $t_\nu^k = u_\nu$, как при доказательстве теоремы 2). Границу этого многообразия назовем *m-й квазидискриминантной поверхностью* в пространстве $(s_k, \ldots, s_{k+n-1})$ и обозначим через $D_m(s_k, \ldots, s_{k+n-1})$.

Если $m \geqslant k+n-1$, то, рассматривая пространство $(s_k, \ldots, s_{k+n-1})$ как подпространство пространства $(s_1, s_2, \ldots, s_m)$, найдем, что многообразие A_m есть не что иное, как проекция части пространства

$(s_1, \ldots, s_m)$, заключенной внутри дискриминантной поверхности [2]), на подпространство $(s_k, \ldots, s_{k+n-1})$. Отсюда в случае $m \geqslant k+n-1$ непосредственно следует односвязность многообразия A_m. Из самого определения следует, что $A_m \subset A_{m+1}$. Далее, $A_{m+1} - A_m$ есть часть пространства, для которой минимальное число параметров, с помощью которых координаты точки представляются в виде соответствующих степенных сумм: $s_i = \sum_\nu t_\nu^i$, равно $m+1$.

Часть пространства $(s_k, \ldots, s_{k+n-1})$, точки которого соответствуют R-продолжаемым полиномам, имеет вид

$$A_n + \sum_{m=n}^{\infty} (A_{m+1} - A_m).$$

§ 3. Экстремальная проблема. В силу теоремы 1 s_1 не влияет на решение задачи [3]). Следовательно, нужно найти ту часть пространства $(s_2, \ldots, s_n)$, координаты точек которой представляются в виде соответствующих степенных сумм.

Если, закрепив значения $s_3, s_4, \ldots, s_n$, мы сможем найти наименьшее значение функции $\sum_{\nu=1}^{k} t_\nu^2$ при связях

$$\sum_{\nu=1}^{k} t_\nu^i = s_i \quad (i = 3, 4, \ldots, n), \tag{3,1}$$

где k может быть любым числом, при котором возможны связи (3,1), то эта задача была бы решена [4]). Действительно, если $\varphi(s_3, s_4, \ldots, s_n)$ есть зависящая от $s_3, s_4, \ldots, s_n$ наименьшая величина всех возможных $\sum_\nu t_\nu^2$, то в силу теоремы 2 искомой областью будет $s_2 > \varphi(s_3, \ldots, s_n)$ [3])

Это решение предполагает, что предварительно найдена часть пространства $(s_3, s_4, \ldots, s_n)$, координаты точек которой представимы в виде соответствующих степенных сумм.

---

[2]) Поставим в соответствие каждому вещественному полиному m-й степени точку $(s_1, \ldots, s_m)$, где s_i — сумма i-х степеней корней этого полинома. Тогда граница части пространства, точки которой соответствуют полиномам, все корни которых вещественны, называется, как известно, дискриминантной поверхностью. Так как система $s_i = t_1^i + \ldots + t_m^i$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ имеет только одно решение, то эта часть пространства гомеоморфна углу $t_1 \geqslant t_2 \geqslant \ldots \geqslant t_m$ m-мерном евклидовом пространстве, следовательно, она односвязна.

[3]) В условии теоремы 1 требуется существование $n-1$ различных между собой t_ν. Как будет видно дальше, случай, когда это условие не выполняется, никаких затруднений не представляет. То же можно заметить и относительно теоремы 2.

[4]) При фиксированных $s_3, s_4, \ldots, s_n$ минимальное значение $\sum_{\nu=1}^{k} t_\nu^2$ соответствует некоторому конечному k. См. § 11.

Для любого фиксированного значения k все минимальные значения
ункции $\sum_{\nu=1}^{k} t_\nu^2$ при связях (3,1) находятся обычным способом Лагранжа [5]).
реди параметров t_ν, соответствующих некоторому относительному мини-
уму, имеется не более $n-2$ отличных друг от друга и от нуля. Это
ытекает из того, что все параметры должны удовлетворять отвечающему
гому минимуму уравнению

$$\lambda_n t^{n-1} + \lambda_{n-1} t^{n-2} + \ldots + \lambda_3 t^2 + 2t = 0,$$

оторое получим, применяя способ Лагранжа.

Так как абсолютный минимум функции $\sum_\nu t_\nu^2$ должен находится среди
тносительных минимумов, принадлежащих некоторому k [3]), то постав-
енной экстремальной задаче можно дать более простую формулировку:
Найти наименьшее значение функции

$$p_1 t_1^2 + p_2 t_2^2 + \ldots + p_{n-2} t_{n-2}^2,$$

де p — любые целые положительные числа, при которых возможны
вязи

$$p_1 t_1^i + p_2 t_2^i + \ldots + p_{n-2} t_{n-2}^i = s_i \quad (i = 3, 4, \ldots, n-2).$$

Решение этой задачи будет дано в конце работы.
Оказывается, что если точка $(s_3, s_4, \ldots, s_n)$ принадлежит

$$A_{m+1}(s_3, \ldots, s_n) - A_m(s_3, \ldots, s_n),$$

о $p_1 + p_2 + \ldots + p_{n-2} = m + 1$.

§ 4. Описание вида квазидискриминантных поверхностей. В этом
араграфе будут сформулированы свойства квазидискриминантных по-
ерхностей, доказательство которых будет проведено в последующих
араграфах.

Будем говорить, что точка $(s_{2\nu+1}, \ldots, s_{2\nu+n-1}, s'_{2\nu+n})$ лежит выше
очки $(s_{2\nu+1}, \ldots, s_{2\nu+n-1}, s''_{2\nu+n})$, если $s'_{2\nu+n} > s''_{2\nu+n}$. Соответственно этому
ля любого многообразия, граница которого со всякой прямой, парал-
ельной оси $s_{2\nu+n}$, пересекается конечное число раз, легко определить
онятие низа и верха границы [6]). Со всякой прямой, параллельной оси
$_{\nu+n}$, квазидискриминантная поверхность при $n > 2$ либо совсем не пе-
есекается, либо пересекается в двух точках. Поверхность эта является
усочно аналитической.

Рассмотрим отдельно квазидискриминантные поверхности в простран-
ве четного и нечетного числа измерений.

---

[5]) Экстремальные значения $\sum_{\nu=1}^{k} t_\nu^2$ могут также соответствовать особым
очкам образа (3,1), но во всех таких точках среди t_ν имеется не более $n-3$
азличных между собой.

[6]) Под низом будем понимать ту часть границы, для точек которой суще-
вуют точки многообразия, сколь угодно близкие к ним и лежащие над ними.
Аналогично определяется верх.

1. Случай пространства нечетного числа измерений $(s_{2\nu+1}, \ldots, s_{2\nu+2k+1})$.

Параметрические уравнения поверхности m-го порядка следующие:

$$s_i = t_1^i + p_i\tau_1^i + \ldots + t_k^i + p_k\tau_k^i \quad (i = 2\nu+1, 2\nu+2, \ldots, 2\nu+2k+1), \tag{4,1}$$

где t, τ, как всегда, вещественны, p может принимать все целые положительные значения, удовлетворяющие условию

$$k + \sum p = m,$$

и параметры t, τ подчиняются одному из условий

$$t_1 \geqslant \tau_1 \geqslant t_2 \geqslant \tau_2 \geqslant \ldots \geqslant t_k \geqslant \tau_k, \tag{4,2}$$

$$\tau_1 \geqslant t_1 \geqslant \tau_2 \geqslant t_2 \geqslant \ldots \geqslant \tau_k \geqslant t_k. \tag{4,3}$$

Первое условие определяет верх поверхности, а второе — низ. Если точка принадлежит верху и μ — наименьший индекс, для которого $p_\mu > 1$, то при $t_l = \tau_l$, где l — одно из чисел $1, 2, \ldots, \mu$, эта точка также принадлежит и низу [7]). Такие равенства, следовательно, определяют переход верха в низ.

Введем новое понятие, не зависящее от четности или нечетности числа измерений.

Пусть дано n каких-нибудь вещественных параметров. Перенумеруем их в порядке убывания:

$$u_1 \geqslant u_2 \geqslant \ldots \geqslant u_\nu \geqslant 0 \geqslant u_{\nu+1} \geqslant \ldots \geqslant u_n;$$

ν может быть равно любому из чисел $0, 1, 2, \ldots, n$. Если $\nu = 0$, то все параметры неположительны, а если $\nu = n$, то все параметры неотрицательны. Будем говорить, что некоторый параметр стоит на четном или нечетном месте, если этот параметр стоит на четном или нечетном месте от нуля — безразлично, слева или справа.

Определение. Представление

$$s_i = \sum_{l=1}^{n} q_l u_l^i \quad (i = 2\nu+1, \ldots, 2\nu+n)$$

называется *каноническим представлением точки* $(s_{2\nu+1}, \ldots, s_{2\nu+n})$, если коэфициенты при всех параметрах, стоящих на нечетных местах, равны единице.

В дальнейшем параметры, стоящие на нечетных местах, будем обозначать через t, а стоящие на четных — через τ. Само представление будет вида

$$s_i = \sum t^i + \sum p\tau^i \quad (i = 2\nu+1, \ldots, 2\nu+n).$$

Определение. Многообразие всех точек пространства $(s_{2\nu+1}, \ldots, s_{2\nu+n})$, допускающих такое каноническое представление, что сумма коэфициентов при всех параметрах равна m (нуль является вполне равно-

[7]) Подробнее этот вопрос будет рассмотрен для $n = 2k$.

равным значением; если какой-нибудь параметр τ равен нулю, то коэффициенту при этом параметре можно приписать любое значение), обозначим символом $\mathfrak{K}_m(s_{2\nu+1}, \ldots, s_{2\nu+n})$.

В § 10 будет доказано, что точка однозначно определяет соответствующее ей каноническое представление.

В пространстве нечетного числа измерений $(s_{2\nu+1}, \ldots, s_{2\nu+2k+1})$ параметры канонического представления должны удовлетворять либо условию

(4,4) $$t_1 \geqslant \tau_1 \geqslant \ldots \geqslant t_{\mu-1} \geqslant \tau_{\mu-1} \geqslant t_\mu \geqslant 0 \geqslant \alpha \geqslant \tau_\mu \geqslant \ldots \geqslant t_k \geqslant \tau_k$$ [8],

либо условию

(4,5) $$\tau_1 \geqslant t_1 \geqslant \ldots \geqslant \tau_{\mu-1} \geqslant \alpha \geqslant 0 \geqslant t_{\mu-1} \geqslant \tau_\mu \geqslant \ldots \geqslant t_k$$ [9].

Очевидно, что при $\alpha = 0$ условия (4,2), (4,3) переходят соответственно в условия (4,4), (4,5), так что параметрическое уравнение квазидискриминантной поверхности $D_m(s_{2\nu+1}, \ldots, s_{2\nu+2k+1})$ является частным случаем канонического представления.

II. Перейдем теперь к случаю пространства четного числа измерений $(s_{2\nu+1}, \ldots, s_{2\nu+2k})$.

Параметрические уравнения низа m-й квазидискриминантной поверхности имеют вид

(4,6) $$s_i = p_1\tau_1^i + t_1^i + p_2\tau_2^i + \ldots + t_{k-1}^i + p_k\tau_k^i \quad (i = 2\nu+1, \ldots, 2\nu+2k),$$

где положительные целочисленные коэфициенты p пробегают все значения, при которых $k - 1 + \sum p = m$, а параметры t, τ удовлетворяют неравенствам

(4,7) $$\tau_1 \geqslant t_1 \geqslant \tau_2 \geqslant \ldots \geqslant \tau_{k-1} \geqslant t_{k-1} \geqslant \tau_k.$$

Уравнения верха напишутся иначе:

(4,8) $$s_i = t_1^i + p_1\tau_1^i + t_2^i + \ldots + p_{k-1}\tau_{k-1}^i + t_k^i \quad (i = 2\nu+1, \ldots, 2\nu+2k).$$

Здесь p — целые положительные числа, удовлетворяющие соотношению $k + \sum p = m$, а параметры подчинены условию

(4,9) $$t_1 \geqslant \tau_1 \geqslant t_2 \geqslant \ldots \geqslant t_{k-1} \geqslant \tau_{k-1} \geqslant t_k.$$

Если μ — наименьший индекс, для которого $p_\mu > 1$, а $\mu + \rho$ — наибольший, для которого $p_{\mu+\rho} > 1$, то низ переходит в верх при $t_{l-1} = \tau_l$, где l — любое из чисел ряда $2, 3, \ldots, \mu$, а также при $\tau_l = t_l$, где l — любое из чисел $\mu + \rho$, $\mu + \rho + 1, \ldots, k - 1$.

Пусть, например, $\mu > 1$ и $t_{l-1} = \tau_l$ $(l \leqslant m)$. Так как $t_{l-1} = \tau_l$, то, полагая

$$t_1' = \tau_1,\ \tau_1' = t_1,\ \ldots,\ t_{l-1}' = \tau_{l-1},\ \tau_{l-1}' = t_{l-1} = \tau_l,\ t_l' = t_l,\ \tau_l' = \tau_{l+1},\ \ldots,$$
$$\tau_{\mu+\rho-1}' = \tau_{\mu+\rho} = t_{\mu+\rho}',\ \ldots,\ t_k' = \tau_k,$$

---

[8]) Один из параметров t я обозначаю здесь и в (4,5), (4,10), (4,11) через α; μ может быть равно любому из чисел $1, 2, \ldots, k+1$. При $\mu = k+1$ условие принимает вид

$$t_1 \geqslant \tau_1 \geqslant \ldots \geqslant \tau_k \geqslant \alpha \geqslant 0.$$

[9]) μ может принимать любое из значений $1, 2, \ldots, k+1$. При $\mu = 1$ условие принимает вид

$$0 \geqslant \alpha \geqslant \tau_1 \geqslant t_1 \geqslant \ldots \geqslant t_k.$$

можно написать

$$s_i = t_1'^i + \tau_1'^i + t_2'^i + \ldots + (p_l + 1)\,\tau_{l-1}'^i + t_l'^i + \ldots + (p_{\mu+\rho} - 1)\,\tau_{\mu+\rho-1}'^i + \\ + t_{\mu+\rho}'^i + \ldots + \tau_{k-1}'^i + t_k'^i \quad (i = 2\nu+1, \ldots, 2\nu+2k),$$

что и доказывает утверждение.

Из дальнейшего будет ясно, что только при указанных условиях возможны переходы низа в верх. Следовательно, для возможности перехода должно выполняться хотя бы одно из неравенств

$$\mu > 1, \quad \mu + \rho < k.$$

Точно так же показывается, что верх переходит в низ при $t_l = \tau_{l-1}$, когда l равно одному из чисел $\mu+\rho, \ldots, k$, и при $t_l = \tau_l$, когда $l = 1, 2, \ldots, k-1$.

Из определения канонического представления следует, что при $n = 2k$ параметры должны удовлетворять либо условию

$$(4{,}10) \quad \tau_1 \geqslant t_1 \geqslant \ldots \geqslant \tau_{\mu-1} \geqslant t_{\mu-1} \geqslant 0 \geqslant \alpha \geqslant \tau_\mu \geqslant \ldots \geqslant t_{k-1} \geqslant \tau_k\ ^{10}),$$

либо условию

$$(4{,}11) \quad t_1 \geqslant \tau_1 \geqslant \ldots \geqslant \tau_{\mu-1} \geqslant \alpha \geqslant 0 \geqslant t_\mu \geqslant \ldots \geqslant \tau_{k-1} \geqslant t_k\ ^{10}).$$

При $\alpha = 0$ (4,10), (4,11) переходят соответственно в (4,7), (4,9), так что параметрические уравнения квазидискриминантной поверхности $D_m(s_{2\nu+1}, \ldots, s_{2\nu+2k})$ являются частным случаем канонического представления.

Важным свойством квазидискриминантных поверхностей является то, что точка с координатами

$$s_i = \sum_{\mu=1}^{m} u_\mu^i \quad (i = 2\nu+1, \ldots, 2\nu+n)$$

тогда и только тогда принадлежит $D_m(s_{2\nu+1}, \ldots, s_{2\nu+n})$, когда правые части представляют параметрические уравнения D_m. Заданием точки на D_m однозначно определяются соответствующие ей коэфициенты p и параметры t, τ.

В § 10 будет доказано, что

$$\mathfrak{R}_{m+1}(s_{2\nu+1}, \ldots, s_{2\nu+n}) = A_{m+1}(s_{2\nu+1}, \ldots, s_{2\nu+n}) - \\ - A_m(s_{2\nu+1}, \ldots, s_{2\nu+n}) + D_m(s_{2\nu+1}, \ldots, s_{2\nu+n}).$$

---

[10]) μ может быть равно любому из чисел 1, 2, ..., $k+1$. При $\mu = 1$ условие (4,10) принимает вид

$$0 \geqslant \alpha \geqslant \tau_1 \geqslant t_1 \geqslant \ldots \geqslant \tau_k,$$

а условие (4,11) принимает вид

$$\alpha \geqslant 0 \geqslant t_1 \geqslant \tau_1 \geqslant \ldots \geqslant t_k.$$

При $\mu = k+1$ (4,10) заменяется условием

$$\tau_1 \geqslant t_1 \geqslant \ldots \geqslant \tau_k \geqslant 0 \geqslant \alpha,$$

а (4,11) заменяется условием

$$t_1 \geqslant \tau_1 \geqslant \ldots \geqslant t_k \geqslant \alpha \geqslant 0.$$

Из самого определения многообразия $A_m(s_{2\nu+1}, \ldots, s_n)$ следует, что то многообразие связное.

Если предположить верными свойства квазидискриминантных поверхностей, высказанные в настоящем параграфе, то найдем, что $A_m(s_{2\nu+1}, \ldots, s_n)$ односвязно. Действительно, если это верно для пространства $(s_{2\nu+1}, \ldots, s_{n-1})$, то это верно и для пространства $(s_{2\nu+1}, \ldots, s_{n-1}, s_n)$, так как $A_m(s_{2\nu+1}, \ldots, s_{n-1})$ является проекцией многообразия $A_m(s_{2\nu+1}, \ldots, s_n)$ на подпространство $(s_{2\nu+1}, \ldots, s_{n-1})$, и очевидно, что многообразие, проекция которого односвязна и которое со всякой прямой, параллельной оси проекции, либо совсем не имеет общих точек, либо имеет общим целый отрезок[11]), само односвязно. Так как для пространства $(s_{2\nu+1}, s_{2\nu+2})$ многообразие $A_m(s_{2\nu+1}, s_{2\nu+2})$ совпадает с частью плоскости, ограниченной кривой $s_{2\nu+1} = mt^{2\nu+1}$, $s_{2\nu+2} = mt^{2\nu+2}$, то все доказано. Впрочем, односвязностью многообразия я нигде в этой работе не пользуюсь. При сделанных предположениях легко также доказывается связность многообразия $A_{m+1} - A_m + D_m$. Действительно, если точки P_1 и P_2 лежат на D_{m+1}, то, как это следует из параметрических уравнений D_{m+1}, их можно соединить кривой, лежащей на D_{m+1}. Пусть P — произвольная точка многообразия $A_{m+1} - A_m + D_m$. От прямой, проходящей через эту точку и параллельной оси s_n, $D_{m+1}(s_{2\nu+1}, \ldots, s_n)$ отсекает отрезок. Хоть одна из двух частей, на которые P делит этот отрезок, принадлежит $A_{m+1} - A_m + D_m$. Это и доказывает связность многообразия.

§ 5. Вывод вида параметрических уравнений квазидискриминантной поверхности $D_m(s_{2\nu+1}, \ldots, s_{2\nu+n})$. Квазидискриминантная поверхность $D_m(s_{2\nu+1}, \ldots, s_{2\nu+n})$ есть граница замкнутого многообразия $A_m(s_{2\nu+1}, \ldots, s_{2\nu+n})$. Если точка $(s_{2\nu+1}, \ldots, s_{2\nu+n})$ принадлежит какому-нибудь A_m и четное число i меньше j, то, как известно,

$$s_j^i \leqslant s_i^j \quad [12]),$$

Это показывает, что для любой фиксированной точки $(s_{2\nu+1}^{(0)}, \ldots, s_{2\nu+n-1}^{(0)})$ из $A_m(s_{2\nu+1}, \ldots, s_{2\nu+n-1})$ существуют верхняя и нижняя границы таких чисел $s_{2\nu+n}$, что точка $(s_{2\nu+1}^{(0)}, \ldots, s_{2\nu+n-1}^{(0)}, s_{2\nu+n})$ принадлежит $A_m(s_{2\nu+1}, \ldots, s_{2\nu+n})$ $(n \geqslant 3)$.

Так как $A_m(s_{2\nu+1}, \ldots, s_{2\nu+n})$ — замкнутое многообразие, не заполняющее всего пространства $(s_{2\nu+1}, \ldots, s_{2\nu+n})$, то его граница $D_m(s_{2\nu+1}, \ldots, s_{2\nu+n})$ — многообразие $n-1$ измерения.

Мы знаем, что точка, координаты которой представляются в виде

$$s_i = \sum_{\nu=1}^{m} t_\mu^i \quad (i = 2\nu+1, \ldots, 2\nu+n), \tag{5,1}$$

---

[11]) Это следует из того, что со всякой прямой, параллельной оси s_n, D_m пересекается не более чем в двух точках, а также из сказанного в начале § 5.

[12]) См., например Н. Н. Мейман-Н. Г. Чеботарев. О R-продолжаемых полиномах, Труды 2-го Всес. матем. съезда, 1934, т. 2, стр. 8—9, формулы (5), (6).

является внутренней для A_m, если среди t_ν имеется не менее n отличных друг от друга ($t=0$ считается равноправным значением) [13]).

Отсюда следует, что точка общего положения на D_m должна иметь вид

$$s_i = q_1 t_1^i + \ldots + q_{n-1} t_{n-1}^i \quad (i = 2\nu+1, \ldots, 2\nu+n), \tag{5,2}$$

где q — числа натурального ряда, $\sum q = m$ и все t различны между собой. Условимся параметры t нумеровать в порядке убывания, так что

$$t_1 > t_2 > \ldots > t_{n-1}.$$

Теорема 3. *Если и среди коэфициентов q с нечетными индексами, и среди q с четными индексами имеются величины, бо́льшие чем единица, то точка $(s_{2\nu+1}, \ldots, s_{2\nu+n})$ из (5,2) не может принадлежать $D_m(s_{2\nu+1}, \ldots, s_{2\nu+n})$.*

Доказательство. Пусть, например, $q_{2l} > 1$ и $q_{2\mu+1} > 1$. Рассмотрим укороченную систему

$$s_j = q_1 u_1^j + \ldots + q_{2l-1} u_{2l-1}^j + \alpha^j + (q_{2l}-1) u_{2l}^j + \ldots + q_{n-1} u_{n-1}^j$$
$$(j = 2\nu+1, \ldots, 2\nu+n-1),$$

где s_j — те же, что и в (5,2). При $\alpha = t_{2l}$ эта система допускает решение $u_1 = t_1, \ldots, u_{2l} = t_{2l}, \ldots, u_{n-1} = t_{n-1}$. Легко найдем, что

$$\left.\frac{du_{2l}}{d\alpha}\right|_{\alpha=t_{2l}} = -\frac{1}{q_{2l}-1},$$

и, следовательно, когда α становится больше t_{2l}, u_{2l} делается меньше t_{2l}. При достаточно малом увеличении α будем иметь

$$u_1 > \ldots > u_{2l-1} > \alpha > u_{2l} > \ldots > u_{n-1}. \tag{5,3}$$

Так как производная по α функции

$$\sigma_{2\nu+n} = q_1 u_1^{2\nu+n} + \ldots + q_{2l-1} u_{2l-1}^{2\nu+n} + \alpha^{2\nu+n} + q_{2l} u_{2l}^{2\nu+n} + \ldots$$
$$\ldots + q_{n-1} u_{n-1}^{2\nu+n}$$

равна

$$\frac{d\sigma_{2\nu+n}}{d\alpha} = (2\nu+n)\,\alpha^{2\nu}(\alpha-u_1)\ldots(\alpha-u_{2l-1})(\alpha-u_{2l})\ldots(\alpha-u_{n-1})$$ [14]),

---

[13]) Если среди чисел t_μ содержится n отличных друг от друга и от нуля, то ранг якобианной матрицы от s по t равен n, и поэтому точка (s_i) имеет окрестность, все точки которой допускают представление вида (5,1) и, значит, принадлежат A_m. Если же среди чисел t_μ имеется n отличных друг от друга, но одно из них равно нулю, то существование такой окрестности доказывается, как в теореме 2, с помощью замены $t_\mu^{2\nu+1} = u_\mu$.

[14]) Эта производная вычисляется так:

$$\frac{d\sigma_{2\nu+n}}{d\alpha} = (2\nu+n)\left[\alpha^{2\nu+n-1} - q_1 u_1^{2\nu+n-1}\frac{\alpha^{2\nu}\,W(\alpha, u_2, \ldots, u_{n-1})}{q_1 u_1^{2\nu}\,W(u_1, \ldots, u_{n-1})} - \ldots\right.$$
$$\left.\ldots - q_{n-1} u_{n-1}^{2\nu+n-1}\frac{\alpha^{2\nu}\,W(u_1, \ldots, u_{n-1}, \alpha)}{q_{n-1} u_{n-1}^{2\nu}\,W(u_1, \ldots, u_{n-1})}\right].$$

Выражение, стоящее в квадратных скобках, является полиномом степени $2\nu + n - 1$ от α, для которого $\alpha = 0$ — корень кратности 2ν, а $\alpha = u_j$ — простые корни.

то при α большем чем $t_{2l'}$, но достаточно близком к нему, в силу (5,3)

$$\operatorname{sgn}\frac{d\sigma_{2\nu+n}}{d\alpha}=(-1)^{2l-1}=-1.$$

Это показывает, что многообразию $A_m(s_{2\nu+1},\ldots,s_{2\nu+n})$ принадлежат точки $(s_{2\nu+1},\ldots,s_{2\nu+n-1},\sigma_{2\nu+n})$, где $\sigma_{2\nu+n}$ меньше $s_{2\nu+n}$ из (5,2) и сколь угодно мало от него отличается.

Рассмотрим теперь другую укороченную систему

$$s_j=q_1v_1^j+\ldots+q_{2\mu}v_{2\mu}^j+\alpha^j+(q_{2\mu+1}-1)v_{2\mu+1}^j+\ldots$$
$$\ldots+q_{n-1}v_{n-1}^j\quad(j=2\nu+1,\ldots,2\nu+n-1),$$

где s_j опять взяты из (5,2).

Все предыдущие рассуждения применимы и к этой системе. Найдем, что $\left.\frac{dv_{2\mu+1}}{d\alpha}\right|_{\alpha=t_{2\mu+1}}=-\frac{1}{q_{2l+1}-1}$ и что при α, большем чем $t_{2\mu+1}$ и достаточно мало от него отличающемся,

$$\operatorname{sgn}\frac{d\sigma'_{2\nu+n}}{d\alpha}=(-1)^{2\mu}=1$$

(здесь $\sigma'_{2\nu+n}=q_1v_1^{2\nu+n}+\ldots+q_{2\mu}v_{2\mu}^{2\nu+n}+\alpha^{2\nu+n}+(q_{2\mu+1}-1)\,v_{2\mu+1}^{2\nu+n}+\ldots$ $\ldots+q_{n-1}v_{n-1}^{2\nu+n}$). Следовательно, A_m принадлежат также точки $(s_{2\nu+1},\ldots,s_{2\nu+n-1},\sigma'_{2\nu+n})$, где $\sigma'_{2\nu+1}$ больше чем $s_{2\nu+n}$ и сколь угодно мало от него отличаются. Это показывает, что при сделанных предположениях точка $(s_{2\nu+1},\ldots,s_{2\nu+n})$ является внутренней для A_m.

Из хода доказательства видно, что для части D_m, ограничивающей A_m сверху, все $q_{2\mu+1}=1$, а для части, ограничивающей A_m снизу, все $q_{2\mu}=1$.

Итак, доказано, что точки $(s_{2\nu+1},\ldots,s_{2\nu+n})$ квазидискриминантной поверхности должны быть вида (4,1) или (4,6), (4,8) в зависимости от того, равно ли n числу $2k+1$ или $2k$, и что, соответственно тому, принадлежат ли точки низу или верху, параметры удовлетворяют одному из условий (4,3), (4,7) или (4,2), (4,9).

Дальше будет показано, что, обратно, каждая точка, координаты которой имеют указанный вид, принадлежит D_m.

Пользуясь соображениями, развитыми в настоящем параграфе, и предполагая установленными свойства квазидискриминантных поверхностей, приведем доказательство того, что

(5,4) $$\mathfrak{R}_{m+1}(s_{2\nu+1},\ldots,s_{2\nu+n})\supseteq A_{m+1}(s_{2\nu+1},\ldots,s_{2\nu+n})-$$
$$-A_m(s_{2\nu+1},\ldots,s_{2\nu+n})+D_m(s_{2\nu+1},\ldots,s_{2\nu+n}).$$

Для определенности примем $n=2k+1$.

Напомним, что под $\mathfrak{R}_{m+1}(s_{2\nu+1},\ldots,s_{2\nu+2k+1})$ понимается многообразие точек, координаты которых представляются в виде соответствующих сумм вида

(5,5) $$s_i=t_1^i+\ldots+t_k^i+\alpha^i+p_1\tau_1^i+\ldots+p_k\tau_k^i$$
$$(i=2\nu+1,\ldots,2\nu+2k+1),$$

где $k+1+\Sigma p=m+1$ и параметры подчиняются либо условию

(5,6) $$t_1 \geqslant \tau_1 \geqslant \ldots \geqslant \tau_{\mu-1} \geqslant t_\mu \geqslant 0 \geqslant \alpha \geqslant \tau_\mu \geqslant \ldots \geqslant \tau_k$$ [8]),

либо условию

(5,7) $$\tau_1 \geqslant t_1 \geqslant \ldots \geqslant \tau_\mu \geqslant \alpha \geqslant 0 \geqslant t_\mu \geqslant \ldots \geqslant t_k$$ [9]).

Из самого определения A_{m+1} следует, что $\mathfrak{K}_{m+1} \subseteq A_{m+1}$. Полагая в (5,5) $\alpha=0$, получим любую точку D_m (мы предполагаем, что все свойства квазидискриминантных поверхностей, указанные в § 4, имеют место), а полагая α равным τ_μ, получим любую точку D_{m+1}. Так как $\mathfrak{K}_{m+1} \subseteq A_{m+1}$, то D_{m+1} является частью границы $\mathfrak{K}_{m+1}$. Единственные возможные границы $\mathfrak{K}_{m+1}$ получаются, когда в условии (5,6) или в условии (5,7) содержится хоть один знак равенства.

Так как граница замкнутого многообразия $\mathfrak{K}_{m+1}$ должна быть $(n-1)$-мерным образом, то достаточно рассмотреть те случаи, когда в условии (5,6) или условии (5,7) содержится не более одного знака равенства. Если этот знак равенства относится к α или t_μ, то соответствующая точка принадлежит либо D_{m+1}, либо D_m. Например, если $\alpha=\tau_\mu$, то точка принадлежит D_{m+1}, а если $\alpha=0$, то точка принадлежит D_m.

Исследуем случай, когда знак равенства относится к другим параметрам. Пусть, например, $\tau_\lambda=t_\lambda$ в (5,6) и $\lambda>\mu$. Точно так же, как в начале этого параграфа, найдем, что $\operatorname{sgn}\left.\frac{d\tau_\lambda}{dt_\lambda}\right|_{t_\lambda=\tau_\lambda}=-1$,

$$\frac{ds_{2\nu+2k+1}}{dt_\lambda}=(2\nu+2k+1)\,t_\lambda^{2\nu}(t_\lambda-t_1)(t_\lambda-\tau_1)\ldots(t_\lambda-t_\mu)(t_\lambda-\alpha)\ldots$$
$$\ldots(t_\lambda-\tau_\lambda)\ldots(t_\lambda-\tau_k)$$ [15]),

и что при t_λ, большем чем τ_λ, но достаточно близком к нему,

$$\operatorname{sgn}\frac{ds_{2\nu+2k+1}}{dt_\lambda}=-1.$$

Так как $s_{2\nu+2k+1}$ получается из $s_{2\nu+2k+1}$, когда t_λ, убывая, стремится к τ_λ, то в $\mathfrak{K}_{m+1}$ существуют точки $(s_{2\nu+1}, \ldots, s_{2\nu+2k}, s_{2\nu+2k+1})$, первые координаты которых имеют старое значение, а разность $s_{2\nu+2k+1}-s_{2\nu+2k+1}>0$ и сколь угодно мала. Следовательно, если точка $(s_{2\nu+1}, \ldots, s_{2\nu+2k+1})$ принадлежит границе $\mathfrak{K}_{m+1}$, то эта граница ограничивает $\mathfrak{K}_{m+1}$ сверху.

Если все p_l, где $\mu \leqslant l < \lambda$, равны единице, то точка (s_i) лежит на D_{m+1} и, следовательно, является граничной точкой $\mathfrak{K}_{m+1}$. Для доказательства того, что точка (s_i) лежит в этом случае на D_{m+1}, поступим как при исследовании вопроса о переходе верха квазидискриминантных поверхностей в низ, а именно положим

$$\tau'_k=\tau_k,\ t'_k=t_k,\ \ldots,\ \tau'_\lambda=\tau_\lambda=t_\lambda,\ t'_\lambda=\tau_{\lambda-1},\ \tau'_{\lambda-1}=t_{\lambda-1},\ \ldots,\ t'_{\mu+1}=\tau_\mu,$$
$$\tau'_\mu=\alpha,\ t'_\mu=t_\mu,\ \tau'_{\mu-1}=\tau_{\mu-1},\ \ldots,\ \tau'_1=\tau_1,\ t'_1=t_1.$$

---

[15]) Мы обозначим через $\bar{s}_i$ координаты точки, для которой $t_\lambda=\tau_\lambda$, и все параметры, кроме t_λ, будем рассматривать как функции от t_λ, определяемые первыми $2k$ соотношениями (5,5), где s_i имеют значения $\bar{s}_i$.

В силу того что все $p_l = 1$ $(\mu \leqslant l < \lambda)$ и параметры t, τ, α удовлетворяют условию (5,6), такая замена возможна. Координаты $(\bar{s}_i)$ представляются в виде

$$\bar{s}_i = t_1'^i + \ldots + p_{\mu-1}\tau_{\mu-1}'^i + t_\mu'^i + \tau_\mu'^i + \ldots + \tau_{\lambda-1}'^i + t_\lambda'^i + \\ + (p_\lambda + 1)\tau_\lambda'^i + \ldots + t_k'^i + p_k\tau_k'^i,$$

что и доказывает утверждение.

Пусть среди p_l $(\mu \leqslant l < \lambda)$ имеются отличные от единицы и пусть ρ — наибольший из индексов l, для которых $p_l > 1$. Можем написать

$$\bar{s}_j = t_1'^j + p_1\tau_1'^j + \ldots + \alpha^j + p_\mu\tau_\mu'^j + \ldots + (p_\rho - 1)\tau_\rho'^j + \\ + t_{\rho+1}'^j + \tau_{\rho+1}'^j + \ldots + t_\lambda'^j + (p_\lambda + 1)\tau_\lambda'^j + \ldots + t_k'^j + p_k\tau_k'^j \\ (j = 2\nu + 1, \ldots, 2\nu + 2k + 1), \tag{5,8}$$

где $t'_{\rho+1} = \tau_\rho$, $\tau'_{\rho+1} = t_{\rho+1}, \ldots, t'_\lambda = \tau_{\lambda-1}$. Все параметры будем рассматривать как функции от $t'_{\rho+1}$, определяемые соотношениями (5,8). Найдем, что при $t'_{\rho+1}$, достаточно близком к τ_ρ, но меньшем чем τ_ρ,

$$\operatorname{sgn} \frac{d\bar{s}_{2\nu+2k+1}}{dt'_{\rho+1}} = -1.$$

Так как $\bar{s}'_{2\nu+2k+1}$ получается из $s_{2\nu+2k+1}$, когда $t'_{\rho+1}$, возрастая, стремится к τ_s, то найдем, что при $t'_{\rho+1}$, меньшем чем τ_ρ, но достаточно близком к нему, разность $\bar{s}_{2\nu+2k+1} - s_{2\nu+2k+1}$ отрицательна и сколь угодно мала по абсолютной величине.

Итак, в этом случае в $\mathfrak{R}_{m+1}$ существуют точки, первые $2k$ координат которых совпадают с первыми $2k$ координатами точки $(\bar{s}_i)$, а последняя координата больше $\bar{s}_{2\nu+2k+1}$, но сколь угодно мало отличается от нее. Так как выше было доказано существование в $\mathfrak{R}_{m+1}$ точек, для которых первые координаты совпадают с первыми координатами точки $(\bar{s}_i)$, а последняя координата меньше $s_{2\nu+2k+1}$, но сколь угодно мало от нее отличается, то точка $(\bar{s}_i)$ не может быть граничной для $\mathfrak{R}_{m+1}$.

Если бы знак равенства в условии (5,6) соединял не τ_λ и t_λ, а $\tau_{\lambda-1}$ t_λ, то рассуждения пришлось бы несколько модифицировать. Так как при этом принципиально новых моментов нет [16]), то эти рассуждения опускаю. То же относится к случаю, когда неравенство $\lambda > \mu$ заменится неравенством $\lambda < \mu$ или условие (5,6) — условием (5,7).

Из всех этих рассуждений вытекает, что единственными возможными границами $\mathfrak{R}_{m+1}$ являются D_{m+1} и D_m. Так как и D_{m+1} и D_m принадлежат $\mathfrak{R}_{m+1}$, а $A_{m+1} - A_m + D_m$ — связное многообразие, то

$$\mathfrak{R}_{m+1} \supseteq A_{m+1} - A_m + D_m.$$

Случай пространства четного числа измерений исследуется точно таким же образом.

§ 6. Вспомогательные предложения. Все параметры τ, u, которые будут встречаться в этом параграфе, предполагаются отличными от нуля.

[16]) Замечу только, что в этом случае придется пользоваться также и частью $\mathfrak{R}_{m+1}$, определяемой условиями (5,7).

Лемма 1. *Пусть в ряде вещественных чисел* τ, *и нет равных между собой, а* α, β — *некоторые положительные числа. Равенства*

$$(6,1)\qquad \rho(i)=\sum_{p=1}^{l}\alpha_p\tau_p^i-\sum_{p=1}^{m}\beta_p u_p^i=0\quad (i=2\nu+1,\ldots,\ 2\nu+2k)$$

возможны только при $l+m>2k$, *и если* $l+m=2k+1$, *то* $|l-m|=1$.

Доказательство. Предположим, что $l+m\leqslant 2k$. Тогда из первых $l+m$ равенств следует, что

$$\tau_1\ldots\tau_l u_1\ldots u_m W(\tau_1,\ldots,\tau_l,\ u_1,\ldots,u_m)=0,$$

а это противоречит наложенным на τ, u условиям.

Пусть теперь $l+m=2k+1$ и, например, $m\leqslant k-1$. В этом случае определитель k-го порядка

$$\begin{vmatrix} s_{2\nu+2} & \ldots & s_{2\nu+k+1}\\ \cdot & \cdot & \cdot\\ \cdot & \cdot & \cdot\\ s_{2\nu+k+1} & \ldots & s_{2\nu+2k}\end{vmatrix},\quad \text{где}\quad s_i=\sum_{p=1}^{l}\alpha_p\tau_p^i=\sum_{p=1}^{m}\beta_p u_p^i,$$

с одной стороны, заведомо больше нуля, а с другой стороны, точно равен нулю.

Из леммы путем индукции выводится, что если $l+m<2k+1$ или $l+m=2k+1$, но $|l-m|>1$, то равенства (6,1) могут иметь место только как тождества. Под тождеством здесь и в дальнейшем понимается тождественное равенство нулю разности $\rho(i)=\sum\alpha\tau^i-\sum\beta u^i$, рассматриваемой как функция от i.

Примечание. Точно так же доказывается, что при сохранении предыдущих условий равенства

$$\rho(i)=0\quad (i=2\nu+1,\ldots,\ 2\nu+2k-2,\ 2\nu+2k-1)$$

возможны только при $l+m>2k-1$, и если $l+m=2k$, то $|l-m|\leqslant 2$.

Лемма 2. *Если все корни полинома*

$$a_0z^n+a_1z^{n-1}+\ldots+a_n\quad (a_n\neq 0)$$

вещественны, то при любом ν

$$D_\nu=\begin{vmatrix} a_{n-1} & a_n & 0 & 0 & \ldots 0\\ a_{n-2} & a_{n-1} & a_n & 0 & \ldots 0\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ a_{n-2\nu+1} & a_{n-2\nu+2} & a_{n-2\nu+3} & a_{n-2\nu+4} & \ldots a_n\\ a_{n-2\nu} & a_{n-2\nu+1} & a_{n-2\nu+2} & a_{n-2\nu+3} & \ldots a_{n-1}\end{vmatrix}>0$$

(члены с отрицательными индексами заменяются нулями).

Доказательство. Эта лемма является просто записью непосредственного следствия [17]) одной теоремы [18]), утверждающей, что полином $c_0 + c_1 z + \ldots + c_m z^m$, составленный из первых m членов ряда

$$\frac{1}{a_n + a_{n-1} z + \ldots + a_0 z^n} = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots,$$

имеет не менее $m - 1$ комплексных корней. Из этого следует, что $\operatorname{sgn} c_{2\nu} = \operatorname{sgn} c_0 = \operatorname{sgn} a_n$; но простым вычислением находим, что

$$c_{2\nu} = \frac{D_\nu}{a_n^{2\nu+1}}.$$

Лемма 3. *Положим*

$$\rho(m) = \sum_{p=1}^{m} \alpha_p \tau_p^m - \sum_{p=1}^{m} \beta_p u_p^m.$$

Если α, β — *любые положительные величины* [19]), *то из условий*

$$\rho(i) = 0 \quad (i = 2\nu + 1,\ 2\nu + 2,\ \ldots,\ 2\nu + 2k - 1)$$

следует

$$\operatorname{sgn} \rho(2\nu) = \operatorname{sgn} \rho(0), \quad \operatorname{sgn} \rho(2\nu + 2k) = -\operatorname{sgn} \rho(0).$$

Доказательство. Составим уравнение, которому удовлетворяют $\tau_1, \ldots, \tau_k, u_1, \ldots, u_k$:

$$z^{2k} + a_1 z^{2k-1} + \ldots + a_{2k} = 0.$$

Из определения $\rho(m)$ следует, что

$$\rho(2k + m) + a_1 \rho(2k + m - 1) + \ldots + a_{2k} \rho(m) = 0.$$

Отсюда, пользуясь условиями $\rho(i) = 0$, получим

$$a_{2k-2\nu} \rho(2\nu) + a_{2k-2\nu+1} \rho(2\nu - 1) + \ldots + a_{2k-1} \rho(1) + a_{2k} \rho(0) = 0,$$
$$a_{2k-2\nu+1} \rho(2\nu) + a_{2k-2\nu+2} \rho(2\nu - 1) + \ldots + a_{2k} \rho(1) = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_{2k-1} \rho(2\nu) + a_{2k} \rho(2\nu - 1) = 0,$$
$$\rho(2\nu + 2k) + a_{2k} \rho(2\nu) = 0 \ [20]).$$

Из первых 2ν уравнений получим

$$\rho(2\nu) = \frac{a_{2k}^{2\nu}}{D_\nu},$$

---

[17]) Этим следствием пользовался, например, Kritikos в статье „Über ganze transzendente Funktionen mit reellen Nullstellen", Math. Ann., т. 81 (1920), стр. 97—118.

[18]) Laguerre, Oeuvres, т. 1, стр. 111.

[19]) Достаточно потребовать, чтобы число отрицательных среди α, β было четно.

[20]) Вывод этих соотношений принадлежит Н. Г. Чеботареву. Мое собственное доказательство леммы чрезвычайно сложно и громоздко.

что и дает $\operatorname{sgn}\rho(2\nu)=\operatorname{sgn}\rho(0)$. Так как, полагая $s_i=\sum\alpha\tau^i=\sum\beta u^i$, мы будем иметь

$$\begin{vmatrix} s_{2\nu+1} & \dots & s_{2\nu+k} \\ \dots & \dots & \dots \\ s_{2\nu+k} & \dots & s_{2\nu+2k-1} \end{vmatrix} = \alpha_1\dots\alpha_k(\tau_1\dots\tau_k)^{2\nu+1}W^2(\tau_1,\dots,\tau_k)=$$

$$=\beta_1\dots\beta_k(u_1\dots u_k)^{2\nu+1}W^2(u_1,\dots,u_k),$$

то

$$a_{2k}=\tau_1\dots\tau_k u_1\dots u_k>0$$

и

$$\operatorname{sgn}\rho(2\nu+2k)=-\operatorname{sgn}\rho(2\nu).$$

Если $\rho(0)=0$, то уравнения $\rho(i)=0$ могут иметь место только как полные тождества.

Лемма 4. *Пусть α и β — некоторые положительные постоянные. Если $\rho(0)=\sum\alpha-\sum\beta\leqslant 0$, то система равенств*

$$\rho(i)=\sum_{p=1}^{m}\alpha_p\tau_p^i-\sum_{p=1}^{k}\beta_p u_p^i=0\quad(i=2\nu+1,\dots,2\nu+2k)$$

возможна только в случае полного тождества.

Доказательство. В силу леммы 1 можем считать, что $m>k$. Исследуем $\rho(2\nu+2k)$ как функцию от τ, u при связях

$$\rho(j)=0\quad(j=2\nu+1,\dots,2\nu+2k-1) \tag{6,1}$$

и добавочном условии $\rho(0)\leqslant 0$. Для доказательства достаточно показать, что при этих условиях $\rho(2\nu+2k)$ всегда положительно, обращаясь в нуль только в случае полного тождества. Так как все функции $\rho(i)$ однородны, то достаточно исследовать $\rho(2\nu+2k)$ при дополнительном условии, что все параметры τ удовлетворяют неравенству

$$1\geqslant\tau\geqslant-1, \tag{6,2}$$

причем хотя бы для одного параметра имеет место знак равенства.

Применяя метод Лагранжа, найдем, что все незафиксированные параметры, отвечающие какому-нибудь экстремуму функции $\rho(2\nu+2k)$ при связях (6,1), должны удовлетворять одному и тому же соответствующему этому экстремуму уравнению

$$z^{2\nu+2k-1}+\lambda_1 z^{2\nu+2k-2}+\dots+\lambda_{2k-1}z^{2\nu}=0.$$

Замена $\tau^{2\nu+1}=\tau'$, $u^{2\nu+1}=u'$ показывает, что параметры должны даже удовлетворять уравнению

$$z^{2k-1}+\lambda_1 z^{2k-2}+\dots+\lambda_{2k-1}=0.$$

Это показывает, что среди незафиксированных параметров, отвечающих какому-либо экстремуму, не более $2k-1$ различных между собой [21]),

[21]) Экстремумы могут также соответствовать особым точкам образа, определяемого равенствами (6,1). Среди незафиксированных параметров такой точки не более $2k-2$ различных между собой.

и, следовательно, общее число различных между собой параметров не превосходит $2k+1$. Значение нуль здесь рассматривается как вполне равноправное, и если какой-нибудь параметр равен нулю, то среди остальных имеется не более $2k$ различных между собой.

Разберем сначала случай, когда среди τ, u имеется не более $2k$ отличных друг от друга и от нуля. Если таких параметров меньше чем $2k$, то соответствующие связи (6,1) обращаются в тождества. Пусть теперь таких параметров $2k$. В силу примечания к лемме 1 среди параметров u число отличных друг от друга и от нуля есть либо $k-1$, либо k. В первом случае форма

$$\sum_{i,\,j=1}^{k} \sigma_{2\nu+i+j} x_i x_j \quad (\sigma_l = \sum \beta u^l)$$

неотрицательная и вырождается, а форма

$$\sum_{i,\,j=1}^{k} s_{2\nu+i+j} x_i x_j \quad (s_l = \sum \alpha \tau^l)$$

положительная. В силу (6,1) все коэфициенты этих форм, кроме последних, совпадают, и поэтому разность последних коэфициентов положительна, т. е.

$$\rho(2\nu+2k) = s_{2\nu+2k} - \sigma_{2\nu+2k} > 0.$$

Если среди u все k отличны друг от друга и от нуля, то среди τ имеется тоже k различных между собой, и в силу условия $\rho(0) < 0$ сумма коэфициентов при этих значениях τ меньше суммы коэфициентов при u. По лемме 3 соответствующее значение $\rho(2\nu+2k)$ положительно.

Остается рассмотреть случай, когда среди τ, u всего $2k+1$ отличных друг от друга и от нуля и $1 \geqslant \tau \geqslant -1$, причем для двух параметров τ достигается равенство. Если среди u имеется только $k-1$ отличных друг от друга и от нуля, то $\rho(2\nu+2k) > 0$. Пусть среди u имеется k различных. Связи (6,1) можно записать в виде

$$\alpha_1 \tau_1^i + \ldots + \alpha_{k+1} \tau_{k+1}^i - \beta_1 u_1^i - \ldots - \beta_k u_k^i = 0$$
$$(i = 2\nu+1, \ldots, 2\nu+2k-1),$$

где

$$1 = \tau_1 \geqslant \tau_2 \geqslant \ldots \geqslant \tau_{k+1} = -1.$$

Рассмотрим функцию

$$\rho(2\nu+2k, \varepsilon) = (\alpha_1 - \varepsilon_1)\tau_1^{2\nu+2k} + \ldots + (\alpha_{k+1} - \varepsilon_{k+1})\tau_{k+1}^{2\nu+2k} - \beta_1 u_1^{2\nu+2k} - \ldots - \beta_k u_k^{2\nu+2k}$$

при связях

(6,4)
$$\rho(i, \varepsilon) = (\alpha_1 - \varepsilon_1)\tau_1^i + \ldots + (\alpha_{k+1} - \varepsilon_{k+1})\tau_{k+1}^i - \beta_1 u_1^i - \ldots - \beta_k u_k^i = 0$$

и условии, что все τ удовлетворяют неравенствам

(6,5)
$$1 = \tau_1 \geqslant \tau_2 \geqslant \ldots \geqslant \tau_{k+1};$$

все $\varepsilon > 0$ сколь угодно малы и так подобраны, что ни одна из частных сумм, составленных из коэфициентов $\alpha - \varepsilon$, не может быть равна ни одной из частных сумм, составленных из коэфициентов β.

Рассмотрим возможный граничный случай $\tau_{k+1} \to -\infty$. Разделив равенства (6,4) на τ'^{i}_{k+1} и переходя к пределу, получим

$$(\alpha_2 - \varepsilon_2)\,\tau'^{i}_2 + \ldots + (\alpha_k - \varepsilon_k)\,\tau'^{i}_k - \\ - (\alpha_{k+1} - \varepsilon_{k+1}) \cdot 1 - \beta_1 u'^{i}_1 - \ldots - \beta_k u'^{i}_k = 0 \\ (i = 2\nu + 1, \ldots, 2\nu + 2k - 1).$$

Так как ε выбраны так, что тождества невозможны, то все τ', u' отличны друг от друга и от нуля. Применяя лемму 3, видим, что при $\tau_{k+1} \to -\infty$ $\rho(2\nu + 2k, \varepsilon)$ стремится к $+\infty$.

Как и выше, найдем, что среди параметров τ, u, отвечающих экстремальным значениям функций $\rho(2\nu + 2k, \varepsilon)$, не более $2k$ различных между собой. Так как связи (6,4) не могут сводиться к тождествам, то таких параметров ровно $2k$ и все они отличны от нуля. Так как $\sum(\alpha - \varepsilon) < \sum\beta$, то соответствующие значения $\rho(2\nu + 2k, \varepsilon)$ положительны и, следовательно, $\rho(2\nu + 2k, \varepsilon)$ при связях (6,4) всегда положительно.

Заставляя все ε стремиться к нулю и переходя к пределу, найдем, что $\rho(2\nu + 2k)$ при связях (6,1) неотрицательно, когда среди τ, u имеется не более $2k + 1$ отличных друг от друга. Допустим, что при некоторой системе значений τ, u $\rho(2\nu + 2k) = 0$. Так как нуль является экстремальным значением, то среди этих значений имеется не более $2k$ отличных друг от друга и от нуля; но если таких значений ровно $2k$, то, как было показано выше, $\rho(2\nu + 2k) > 0$; следовательно, таких значений меньше $2k$; но тогда соответствующие связи (6,1) вырождаются в тождества.

Итак, доказано, что все экстремумы $\rho(2\rho + 2k)$ неотрицательны и обращаются в нуль только в случаях тождества. Отсюда следует, что $\rho(2\nu + 2k)$ при связях (6,1) равно нулю только для тех значений параметров, при которых эти связи вырождаются в тождества. Лемма полностью доказана.

Несколько проще доказывается следующее предложение:

Лемма 5. *Пусть α и β положительны и $\tau_1 > \tau_2 > \ldots > \tau_{k+1}$. Если $\alpha_2 + \ldots + \alpha_{k+1} \geqslant \beta_1 + \ldots + \beta_k$, то равенства*

$$(6,6) \qquad \rho(i) = \sum_{p=1}^{k+1} \alpha_p \tau_p^i - \sum_{p=1}^{k} \beta_p u_p^i = 0 \quad (i = 2\nu + 1, \ldots, 2\nu + 2k)$$

не могут иметь места при $0 > \tau_1 > \ldots > \tau_{k+1}$. Наоборот, если $\alpha_2 + \ldots + \alpha_{k+1} \leqslant \beta_1 + \ldots + \beta_k$, то равенства (6,6) *не могут иметь места, когда $\tau_1 > 0 > \tau_2 > \ldots > \tau_{k+1}$, $0 > u_1 > \ldots > u_k$.*

Доказательство. Рассмотрим функцию $\rho(2\nu + 2k)$ при связях $\rho(j) = 0$ $(j = 2\nu + 1, \ldots, 2\nu + 2k - 1)$ и добавочном условии

$$0 \geqslant \tau_1 \geqslant \tau_2 \geqslant \ldots \geqslant \tau_{k+1} = -1.$$

Среди параметров τ, u, соответствующих какому-нибудь экстремальному значению $\rho(2\nu + 2k)$, имеется не более $2k$ отличных друг от друга и от нуля. Если их меньше $2k$ отличных от нуля, то все равенства вырож-

даются в простые тождества и соответствующее значение $\rho(2\nu+2k)=0$. Пусть различных параметров имеется $2k$. Среди u должно быть k различных, так как в противном случае определитель

$$\begin{vmatrix} \rho_{2\nu+1} & \cdots & \rho_{2\nu+k} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \rho_{2\nu+k} & \cdots & \rho_{2\nu+2k-1} \end{vmatrix} \quad (\rho_l=\sum \alpha\tau^l=\sum \beta u^l)$$

должен был бы обращаться в нуль; но в силу условия $0>\tau_1>\ldots>\tau_{k+1}$ он заведомо не обращается в нуль.

Так как среди u имеется всего k различных, то среди τ тоже k различных, и в силу условий $\alpha_2+\ldots+\alpha_{k+1}\geqslant\beta_1+\ldots+\beta_k$ сумма коэфициентов при τ не меньше суммы коэфициентов при u, откуда по лемме 3 следует, что соответствующее значение $\rho(2\nu+2k)$ неположительно. Первая половина леммы полностью доказана.

Для доказательства второго утверждения нужно рассмотреть функцию $\rho(2\nu+2k)$ при связях $\rho(j)=0$ $(j=2\nu+1,\ldots,2\nu+2k-1)$ и дополнительных условиях

$$\tau_1\geqslant 0\geqslant\tau_2\geqslant\ldots\geqslant\tau_{k+1},\quad 0\geqslant u_1\geqslant\ldots\geqslant u_{n+1}=-1.$$

Повторяя предыдущие рассуждения, придем к рассмотрению двух случаев:

1. Среди τ содержится $k+1$ отличных друг от друга и от нуля, среди u — всего k.

Соответствующее значение $\rho(2\nu+2k)$ положительно.

2. Среди τ всего k отличных друг от друга и от нуля, среди u — тоже k.

Так как все u отрицательны, то все оставшиеся τ тоже отрицательны, а сумма коэфициентов при τ не больше суммы коэфициентов при u, так как по условию $\alpha_2+\ldots+\alpha_{k+1}\leqslant\beta_1+\ldots+\beta_k$, откуда (лемма 3) следует, что соответствующее значение $\rho(2\nu+2k)$ неотрицательно.

Итак, при связях $\rho(j)=0$ и наложенных условиях все экстремальные значения $\rho(2\nu+2k)$ неотрицательны, причем равенство нулю может иметь место только в случае полного тождества. Лемма полностью доказана. Из хода доказательства видно, что при $0>u_1>\ldots>u_k$ и $\alpha_2+\ldots+\alpha_{k+1}=\beta_1+\ldots+\beta_k$ равенства (6, 6) могут иметь место только как полные тождества.

Лемма 6. *Пусть α, β — некоторые положительные постоянные и параметры τ, и перенумерованы в порядке убывания:*

$$\tau_1>\tau_2>\ldots>\tau_{k+1},\quad u_1>u_2>\ldots>u_k.$$

Если $\alpha_1\leqslant\beta_1$ и $\tau_1>0$, *то из равенства*

$$\rho(i)=\sum_{p=1}^{k+1}\alpha_p\tau_p^i-\sum_{p=1}^{k}\beta_p u_p^i\quad(i=2\nu+1,\ldots,2\nu+2k) \tag{6,7}$$

следует, что

$$\rho(2\nu+2k+1)=\sum_{p=1}^{k+1}\alpha_p\tau_p^{2\nu+2k+1}-\sum_{p=1}^{k}\beta_p u_p^{2\nu+2k+1}>0.$$

Доказательство. Перепишем равенства $\rho(i)=0$ в виде

$$\alpha_1\tau_1^{2\nu+1}=1\cdot(-\alpha_2\tau_2^{2\nu+1})+\ldots+1\cdot(-\alpha_{k+1}\tau_{k+1}^{2\nu+1})+$$
$$+1\cdot\beta_1u_1^{2\nu+1}+\ldots+1\cdot\beta_ku_k^{2\nu+1},$$

. . . . . .

. . . . . .

$$\alpha_1\tau_1^{\nu+2k}=\tau_2^{2k-1}(-\alpha_2\tau_2^{2\nu+1})+\ldots+\tau_{k+1}^{2k-1}(-\alpha_{k+1}\tau_{k+1}^{2\nu+1})+$$
$$+u_1^{2k-1}\cdot\beta_1u_1^{2\nu+1}+\ldots+u_k^{2k-1}\cdot\beta_ku_k^{2\nu+1}.$$

Решая эту систему относительно $-\alpha\tau^{2\nu+1}$, $\beta u^{2\nu+1}$, найдем

$$-\alpha_\mu\tau_\mu^{2\nu+1}=$$
$$=\alpha_1\tau_1^{2\nu+1}\frac{(\tau_1-\tau_2)\ldots(\tau_1-\tau_{\mu-1})(\tau_1-\tau_{\mu+1})\ldots(\tau_1-\tau_{k+1})(\tau_1-u_1)\ldots(\tau_1-u_k)}{(\tau_\mu-\tau_2)\ldots(\tau_\mu-\tau_{\mu-1})(\tau_\mu-\tau_{\mu+1})\ldots(\tau_\mu-\tau_{k+1})(\tau_\mu-u_1)\ldots(\tau_\mu-u_k)},$$

$$\beta_\mu u_\mu^{2\nu+1}=$$
$$=\alpha_1\tau_1^{2\nu+1}\frac{(\tau_1-\tau_2)\ldots(\tau_1-\tau_{k+1})(\tau_1-u_1)\ldots(\tau_1-u_{\mu-1})(\tau_1-u_{\mu+1})\ldots(\tau_1-u_k)}{(u_\mu-\tau_2)\ldots(u_\mu-\tau_{k+1})(u_\mu-u_1)\ldots(u_\mu-u_{\mu-1})(u_\mu-u_{\mu+1})\ldots(u_\mu-u_k)}.$$

Перемножив между собой все эти выражения, получим [22])

$$(-1)^k\alpha_2\ldots\alpha_{k+1}\beta_1\ldots\beta_k(\tau_2\ldots\tau_{k+1}u_1\ldots u_k)^{2\nu+1}=$$
$$=(\alpha_1\tau_1^{2\nu+1})^{2k}\frac{[(\tau_1-\tau_2)\ldots(\tau_1-\tau_{k+1})(\tau_1-u_1)\ldots(\tau_1-u_k)]^{2k-1}}{(-1)^{\frac{2k(2k-1)}{2}}W^2(\tau_2,\ldots,\tau_{k+1},u_1,\ldots,u_k)},$$

откуда

$$\operatorname{sgn}(\tau_2\ldots\tau_{k+1}u_1\ldots u_k)=\operatorname{sgn}(\tau_1-u_1)\ldots(\tau_1-u_k)\ [23]).$$

Докажем теперь, что все u меньше τ_1. Допустим противоположное: пусть $u_1>\tau_1$. Имеем

$$\left(\frac{u_1}{\tau_1}\right)^{2\nu+1}=\frac{\alpha_1}{\beta_1}\frac{(\tau_1-\tau_2)\ldots(\tau_1-\tau_{k+1})}{(u_1-\tau_2)\ldots(u_1-\tau_{k+1})}\frac{(\tau_1-u_2)\ldots(\tau_1-u_k)}{(u_1-u_2)\ldots(u_1-u_k)}.$$

Так как по условию $0<\frac{\alpha_1}{\beta_1}<1$, то из допущения $u_1>\tau_1$ должно следовать $u_2>\tau_1$, ибо в противном случае каждая из дробей, входящая множителем в выражение для $\frac{u_1}{\tau_1}$, меньше единицы. Перемножая, однако, выражения для u_1 и u_2 и предполагая при этом, что $u_2>\tau_1$, найдем

$$\operatorname{sgn}(u_1u_2)^{2\nu+1}=\operatorname{sgn}\frac{\tau_1-u_2}{u_1-u_2}\cdot\frac{\tau_1-u_1}{u_2-u_1}=-1,$$

что противоречит неравенствам $u_1>u_2>\tau_1>0$. Итак, предположение $u_1>\tau_1$ приводит к противоречию. Из $u_1<\tau_1$ следует

$$\operatorname{sgn}(\tau_1\tau_2\ldots\tau_{k+1}u_1\ldots u_k)=1. \tag{6,8}$$

---

22) $W(\tau_2,\ldots,u_k)$ в силу леммы 1 отличен от нуля.

23) Вывод этого соотношения принадлежит моему товарищу по аспирантуре В. В. Морозову.

Положим

$$\sum_{p=1}^{k+1} \alpha_p \tau_p^m = s_m, \qquad \sum_{p=1}^{k} \beta_p u_p^m = \sigma_m,$$

$$\begin{vmatrix} s_{2\nu+1} \dots s_{2\nu+l} \\ \dots\dots\dots \\ s_{2\nu+l} \dots s_{2\nu+2l-1} \end{vmatrix} = \Delta_l, \qquad \begin{vmatrix} \sigma_{2\nu+1} \dots \sigma_{2\nu+l} \\ \dots\dots\dots \\ \sigma_{2\nu+l} \dots \sigma_{2\nu+2l-1} \end{vmatrix} = \Delta'_l.$$

В силу связей (6,7) $\Delta_1 = \Delta'_1, \dots, \Delta_k = \Delta'_k, \ \Delta'_{k+1} = 0$.

Так как α и β положительны, то число отрицательных τ равно числу перемен знаков в ряде $1, \Delta_1, \dots, \Delta_{k+1}$, а число отрицательных u — числу перемен знаков в ряде $1, \Delta'_1, \dots, \Delta'_k$. Следовательно, при связях (6,7) число отрицательных τ может только на единицу превосходить число отрицательных u. В силу (6,8) в рассматриваемом случае эти числа равны и, следовательно, $\operatorname{sgn} \Delta_{k+1} = \operatorname{sgn} \Delta_k$. Так как $\Delta'_{k+1} = 0$, то $\Delta_{k+1} = \rho(2\nu + 2k + 1)\Delta_k$ и $\rho(2\nu + 2k + 1) > 0$. Лемма полностью доказана.

Примечание 1. Если коэфициенты α, β удовлетворяют неравенству $\alpha_2 + \dots + \alpha_{k+1} \geqslant \beta_1 + \dots + \beta_k$, то из леммы 5 вытекает, что $\tau_1 > 0$, и тогда достаточно одного условия $\alpha_1 \leqslant \beta_1$.

Примечание 2. Если бы нам было дано, что $\beta_1 \leqslant \alpha_1$ и $u_1 > 0$, то, повторяя предыдущие рассуждения, мы пришли бы к соотношению

$$\operatorname{sgn}(\tau_1 \dots \tau_{k+1} u_1 \dots u_k) = -1,$$

которое показывает, что в этом случае $\rho(2\nu + 2k + 1) < 0$.

§ 7. Квазидискриминантные поверхности в пространстве $(s_{2\nu+1}, \dots, s_{2\nu+2k+1})$ нечетного числа измерений. Свойства квазидискриминантных поверхностей будем доказывать методом индукции, предполагая, что эти свойства, сформулированные в § 4, уже установлены для любого пространства меньшего числа измерений. Это замечание относится и к последующим параграфам.

В § 5 было доказано, что всякая точка на $D_m(s_{2\nu+1}, \dots, s_{2\nu+2k+1})$ должна допускать представление

(7,1) $$s_i = t_1^i + p_1 \tau_1^i + \dots + t_k^i + p_k \tau_k^i \quad (i = 2\nu + 1, \dots, 2\nu + 2k + 1),$$

где $k + \sum p = m$ и

(7,2) $$t_1 \geqslant \tau_1 \geqslant \dots \geqslant \tau_k,$$

если точка принадлежит верху, и

(7,3) $$\tau_1 \geqslant t_1 \geqslant \dots \geqslant t_k,$$

если точка принадлежит низу.

Для того чтобы окончательно решить вопрос о $D_m(s_{2\nu+1}, \dots, s_{2\nu+2k+1})$, нужно доказать следующую теорему:

Теорема 4. *Из равенств*

(7,4) $$\rho(i) = t_1^i + p_1 \tau_1^i + \dots + t_k^i + p_k \tau_k^i - \sum_{l=1}^{m} u_l = 0$$
$$(i = 2\nu + 1, \dots, 2\nu + 2k),$$

где $k+\sum p=m$ *и параметры* t, τ *удовлетворяют условию* (7,2), *следует неравенство*

$$\rho(2\nu+2k+1)=t_1^{2\nu+2k+1}+\ldots+p_k\tau_k^{2\nu+2k+1}-\sum_{l=1}^{m}u_l^{2\nu+2k+1}\geqslant 0.$$

Знак равенства имеет место только в случае полного тождества.

Доказательство. Заметим, что если t_1 совпадает с каким-нибудь другим параметром, то связи (7,4) принимают вид

$$p_1\tau_1^i+t_2^i+p_2\tau_2^i+\ldots+t_k^i+p_k\tau_k^i-\sum_{l=1}^{m}u_l^i=0$$
$$(i=2\nu+1,\ \ldots,\ 2\nu+2k),$$

и по предположению индукции могут иметь место только как тождества.

В силу однородности всех выражений $\rho(i)$ достаточно исследовать функцию $\rho(2\nu+2k+1)$ при ограничении

(7,5) $$1\geqslant t_1\geqslant\tau_1\geqslant\ldots\geqslant\tau_k\geqslant-1.$$

При этом ограничении экстремумы $\rho(2\nu+2k+1)$ при связях (7,4) можно разбить на две категории: экстремумы первой категории получаются, когда закрепляется только один из параметров $t_1=1$ или $\tau_k=-1$; экстремумы второй категории получаются, когда закрепляются оба параметра.

Как при доказательстве леммы 4, найдем, что среди незакрепленных параметров, отвечающих какому-либо экстремуму, имеется не более $2k$ различных между собой, и, следовательно, общее число различных параметров, отвечающих экстремуму первой категории, не более $2k+1$, а отвечающих какому-нибудь экстремуму второй категории — не более $2k+2$. Нуль рассматривается как равноправное значение.

Условимся раз навсегда значения параметров и коэфициентов при них, отвечающие экстремальным значениям рассматриваемой функции, обозначать теми же буквами, но с черточками над ними. Кроме того, все параметры, имеющие одно и то же значение, будем собирать в один член и обозначать этот параметр через $\bar{\tau}$, если коэфициент при нем положительный, и через $\bar{u}$, если коэфициент при нем отрицательный.

Во всех экстремумах первой категории связи (7,4) вырождаются в тождества. Действительно, если ни один из параметров не исчезает, то сумма коэфициентов при $\bar{\tau}$ равна сумме коэфициентов при $\bar{u}$, и так как число различных среди $\bar{\tau}$, $\bar{u}$ не более $2k+1$, то по лемме 4 связи вырождаются. Если же некоторые из параметров исчезают, то среди оставшихся не более $2k$ различных.

Разберем экстремумы второй категории. Оставляя в стороне случаи, когда связи вырождаются в тождества, найдем, что связи должны принять вид

(7,6) $$\bar{t}_1^i+\bar{p}_1\bar{\tau}_1^i+\ldots+\bar{p}_k\bar{\tau}_k^i=\bar{q}_1\bar{u}_1^i+\ldots+\bar{q}_{k+1}\bar{u}_{k+1}^i$$
$$(i=2\nu+1,\ \ldots,\ 2\nu+2k),$$

где все $\bar{t}$, $\bar{\tau}$, $\bar{u}$ отличны друг от друга, $\bar{t}_1 = 1$ и $1 + \sum \bar{p} = \sum \bar{q}$. Один из параметров τ или u может быть равен нулю. Действительно, $t_1 = 1$ должно быть отлично от всех других параметров, а среди $\bar{u}$ должно быть $k+1$ различных между собой, так как если бы среди $\bar{u}$ было только k отличных друг от друга и от нуля, а среди $\bar{t}$, $\bar{\tau}$ было $k+2$ отличных друг от друга и от нуля, то согласно лемме 4 связи (7,4) могли бы иметь место только тогда, когда сумма коэфициентов при $\bar{u}$ была бы меньше, чем сумма коэфициентов при $\bar{t}$, $\bar{\tau}$. Так как $k + \sum p = m$, то это может иметь место только тогда, когда некоторые из параметров u обращаются в нуль, но тогда общее число (считая и нуль) различных между собой параметров $\bar{t}$, $\bar{\tau}$, $\bar{u}$ было бы равно $2k+3$. Все это доказывает, что связи должны быть указанного вида.

Если в (7,6) одно из $\bar{\tau}$ или $\bar{u}$ равно нулю, то в силу леммы 6 $\bar{\rho}(2\nu + 2k + 1) > 0$. Для того чтобы доказать положительность $\bar{\rho}(2\nu + 2k + 1)$ при связях (7,6), докажем положительность функции

$$\rho(2\nu + 2k + 1, \varepsilon) = 1 + \bar{p}_1 \tau_1^{2\nu+2k+1} + \ldots + \bar{p}_{k-1} \tau_k^{2\nu+2k+1} + (\bar{p}_k + \varepsilon) \tau_k^{2\nu+2k+1} - \bar{q}_1 u_1^{2\nu+2k+1} - \ldots - \bar{q}_{k+1} u_{k+1}^{2\nu+2k+1}$$

при связях

$$(7,7) \qquad 1 + \bar{p}_1 \tau_1^i + \ldots + (\bar{p}_k + \varepsilon) \tau_k^i - \bar{q}_1 u_1^i - \ldots - \bar{q}_{k+1} u_{k+1}^i = 0 \qquad (i = 2\nu + 1, \ldots, 2\nu + 2k)$$

и условиях

$$1 \geqslant \tau_1 \geqslant \ldots \geqslant \tau_k, \quad 1 + \sum \bar{p} = \sum \bar{q}$$

для любого нецелого положительного ε.

Среди величин 1, τ, u, отвечающих какому-нибудь экстремуму $\rho(2\nu + 2k + 1, \varepsilon)$, не более $2k+1$ различных между собой. Если какой-нибудь из параметров τ, u равен единице, то связи (7,7) принимают либо вид

$$(1 + \bar{p}_1) \tau_1^i + \ldots + (\bar{p}_k + \varepsilon) \tau_k^i = \bar{q}_1 u_1^i + \ldots + \bar{q}_{k+1} u_{k+1}^i,$$

либо вид

$$\bar{p}_1 \tau_1^i + \ldots + (p_k + \varepsilon) \tau_k^i = (\bar{q}_1 - 1) u_1^i + \ldots + \bar{q}_{k+1} u_{k+1}^i.$$

Так как сумма коэфициентов при τ больше, чем сумма коэфициентов при u, то по лемме 4 эти соотношения могут иметь место только как тождества. Оставляя этот случай в стороне, видим, что согласно примечанию 2 к лемме 6 все остальные экстремальные значения положительны.

Остается рассмотреть еще возможный граничный случай, когда τ_k стремится к $-\infty$. Разделив (7,7) на $|\tau_k|^i$, придем в пределе к соотношениям

$$\bar{p}_1 \tau_1'^i + \ldots + (\bar{p}_k + \varepsilon) \tau_k'^i = \bar{q}_1 u_1'^i + \ldots + \bar{q}_{k+1} u_{k+1}'^i,$$

где $0 > \tau_1' > \ldots > \tau_k' = -1$. Так как $\bar{p}_1 + \ldots + \bar{p}_k + \varepsilon > \sum' \bar{q}$, где штрих означает, что суммирование распространяется на все коэфициенты,

кроме какого-нибудь одного, то по лемме 5 все u' отрицательны, и, следовательно, $\rho(2\nu+2k+1,\varepsilon)$ стремится к $+\infty$, когда $\tau_k \to -\infty$.

Итак, при любом положительном ε имеем $\rho(2\nu+2k+1,\varepsilon)\geqslant 0$. Заставляя ε стремиться к нулю и переходя к пределу, найдем, что все экстремальные и граничные значения $\rho(2\nu+2k+1)$ неотрицательны, а значит, и сама функция неотрицательна. А если так, то значение нуль является для $\rho(2\nu+2k+1)$ экстремумом первой категории (с одним закрепленным параметром). Но выше было показано, что при экстремумах такого рода связи (7,4) вырождаются в тождества. Мы видим, что $\rho(2\nu+2k+1)$ обращается в нуль только в тривиальных случаях тождества.

Умножая все параметры на -1, получаем следующий результат:

Теорема 5. *Если параметры t, τ подчиняются не условию* (7,2), *а условию* (7,3), *то из связей* (7,4) *вытекает неравенство*

$$\rho(2\nu+2k+1)\leqslant 0.$$

Равенство достигается только в тривиальном случае, когда связи (7,4) *вырождаются в тождества.*

Из теоремы 4 вытекает как следствие следующая теорема:

Теорема 6. *При любых s_i только одна из всех возможных систем уравнений*

$$s_i = t_1^i + p_1\tau_1^i + \ldots + t_k^i + p_k\tau_k^i \quad (i=2\nu+1,\ldots,2\nu+2k),$$

где p могут быть любыми числами натурального ряда, удовлетворяющими условию $k+\sum p=$ фиксированному числу m, может иметь решение, удовлетворяющее неравенствам (7,2), *и эта система имеет только одно такое решение.*

Это значит, что если такое решение вообще существует, то величины p, t, τ однозначно определяются величинами m, s_i.

Доказательство. Допустим, что теорема неверна. Тогда существуют такие t, τ, u, v, p, q (p и q могут совпадать), что

$$\sum_{\mu=1}^{k} t_\mu^i + \sum_{\mu=1}^{k} p_\mu t_\mu^i = \sum_{\mu=1}^{k} v_\mu^i + \sum_{\mu=1}^{k} q_\mu u_\mu^i \quad (i=2\nu+1,\ldots,2\nu+2k),$$

где

$$\sum p=\sum q, \quad t_1\geqslant\tau_1\geqslant\ldots\geqslant t_k\geqslant\tau_k, \quad v_1\geqslant u_1\geqslant\ldots\geqslant v_k\geqslant u_k.$$

Так как $\sum p=\sum q$, то по теореме 4

$$t_1^{2\nu+2k+1}+\ldots+p_k\tau_k^{2\nu+2k+1}=v_1^{2\nu+2k+1}+\ldots+q_k u_k^{2\nu+2k+1};$$

но в силу той же теоремы равенство возможно только в случае полного тождества.

Все эти теоремы доказывают, что со всякой прямой, параллельной оси $s_{2\nu+2k+1}$, $D_m(s_{2\nu+1},\ldots,s_{2\nu+2k+1})$ либо совсем не пересекается, либо пересекается в двух точках, и что всякая точка (4,1) при одном из условий (4,2), (4,3) принадлежит соответственно верху или низу D_m.

Вообще все свойства, которые мы предполагаем для квазидискриминантных поверхностей в пространстве числа измерений, меньшего n, верны и в пространстве n измерений, если n нечетное.

§ 8. Верх квазидискриминантной поверхности $D_m(s_{2\nu+1}, \ldots, s_{2\nu+2k})$.

Теорема 7. *Из равенств*

$$\rho(i) = t_1^i + p_1\tau_1^i + \ldots + t_k^i - \sum_{l=1}^{m} u_l^i = 0 \tag{8,1}$$

$$(i = 2\nu+1, \ldots, 2\nu+2k-1),$$

где $k + \sum p = m$ *и параметры* t, τ *удовлетворяют условию*

$$t_1 \geqslant \tau_1 \geqslant t_2 \geqslant \ldots \geqslant \tau_{k-1} \geqslant t_k, \tag{8,2}$$

следует

$$\rho(2\nu+2k) = t_1^{2\nu+2k} + p_1\tau_1^{2\nu+2k} + \ldots + t_k^{2\nu+2k} - \sum_{l=1}^{m} u_l^{2\nu+2k} \geqslant 0.$$

Равенство имеет место только тогда, когда связи (8,1) *вырождаются в тождества.*

Доказательство. Как и в предыдущем параграфе, наложим ограничение

$$1 \geqslant t_1 \geqslant \ldots \geqslant t_k \geqslant -1. \tag{8,3}$$

Если один из параметров t, τ, u совпадает с t_1 или t_k, то связи (8,1) должны принять либо вид

$$s_i' = p_1'\tau_1^i + t_2^i + \ldots + p_{k-1}\tau_{k-1}^i + t_k^i = \sum_l u_l^i, \tag{8,4}$$

либо вид

$$s_i'' = t_1^i + p_1\tau_1^i + \ldots + t_{k-1}^i + p_{k-1}\tau_{k-1}^i = \sum_l u_l^i, \tag{8,5}$$

причем сумма коэфициентов при параметрах t, τ равна числу параметров u. Согласно предположению индукции точка (s_i') или точка (s_i'') принадлежит соответственно верху или низу $D_q(s_{2\nu+1}, \ldots, s_{2\nu+2k-1})$ [24]), и связи (8,4), (8,5) могут иметь место только как тождества. Соответствующее значение $\rho(2\nu+2k) = 0$. Для всех экстремумов функции $\rho(2\nu+2k)$ при связях (8,1) и условии (8,3) должно выполняться либо одно из равенств $t_1 = 1$, $t_k = -1$, либо оба равенства.

Если закреплен только один из параметров $t_1 = 1$ или $t_k = -1$, то все остальные параметры t, τ, отвечающие некоторому экстремуму, должны удовлетворять некоторому соответствующему этому экстремуму уравнению

$$z^{2k-1} + \lambda_1 z^{2k-2} + \ldots + \lambda_{2k-1} = 0.$$

В этом случае общее число различных между собой параметров не превосходит $2k$. Так как сумма коэфициентов при t, τ равна сумме коэфициентов при u, то в силу леммы 3 связи (8,1) для этих значений параметров вырождаются в тождества, и соответствующие значения $\rho(2\nu+2k) = 0$.

Если закреплены и $t_1 = 1$ и $t_k = -1$, то общее число различных между собой среди параметров, отвечающих какому-нибудь экстремуму,

---

[24]) $q = m$ или $m-1$, в зависимости от того, совпадает ли t_1 либо t_k с одним из параметров t, τ или с одним из параметров u.

не превосходит $2k+1$. Оставляя в стороне случаи вырождения связей в тождества, найдем, что в этом случае связи будут либо вида

$$(8,6)\quad \bar{t}_i^i+\bar{p}_1\bar{\tau}_1^i+\ldots+\bar{p}_{k-1}\bar{\tau}_{k-1}^i+\bar{t}_k^i=\sum_{l=1}^{k}\bar{q}_l\bar{u}_l^i,\quad \bar{t}_1=1,\ \bar{t}_k=-1,$$

либо вида

$$(8,7)\quad s_i'=\bar{t}_1+\bar{p}_1\bar{\tau}_1^i+\ldots+\bar{p}_{k-2}\bar{\tau}_{k-2}^i+\bar{t}_k^i=\sum_{l=1}^{k+1}\bar{q}_l\bar{u}_l^i,\quad 2+\sum\bar{p}=\sum\bar{q},$$

где одно из $\bar{\tau}$ или $\bar{u}$ может обратиться в нуль.

Действительно, согласно лемме 1 число различных между собой и отличных от нуля параметров $\bar{t}$, $\bar{\tau}$ или $\bar{u}$ не меньше $k-1$. Если бы параметров $\bar{t}$, $\bar{\tau}$, например, было $k-1$, а отличных друг от друга и от нуля параметров $\bar{u}$ было $k+2$, то по лемме 4 сумма коэфициентов при $\bar{t}$, $\bar{\tau}$ была бы меньше суммы коэфициентов при $\bar{u}$; но тогда некоторые из параметров $\bar{t}$, $\bar{\tau}$ обращались бы в нуль, и общее число различных между собой параметров $\bar{t}$, $\bar{\tau}$, $\bar{u}$, считая и нуль, было бы равно $2k+2$. Кроме того, как было показано, t_1 и t_k могут совпадать с другими параметрами только при тождествах.

В силу предположения индукции связи не могут быть вида (8,7), так как точка $(s'_{2\nu+1},\ldots,s'_{2\nu+2k-2})$ принадлежит $D_{2+\sum\bar{p}}(s_{2\nu+1},\ldots,s_{2\nu+2k-2})$, и (8,7) могут выполняться только в случае полного тождества.

Для определения знака

$$\bar{\rho}(2\nu+2k)=t_1^{2\nu+2k}+\bar{p}_1\bar{\tau}_1^{2\nu+2k}+\ldots+\bar{p}_{k-1}\bar{\tau}_{k-1}^{2\nu+2k}+t_k^{2\nu+2k}-\sum_{l=1}^{k}\bar{q}_l\bar{u}_l^{2\nu+2k}$$

при связях (8,6) исследуем функцию

$$\rho(2\nu+2k,\varepsilon)=t_1^{2\nu+2k}+\bar{p}_1\tau_1^{2\nu+2k}+\ldots+\bar{p}_{k-1}\tau_{k-1}^{2\nu+2k}+(1-\varepsilon)\,t_k^{2\nu+2k}-$$
$$-\sum_{l=1}^{k}q_lu_l^{2\nu+2k}$$

при связях

$$(8,8)\quad t_1^i+\ldots+\bar{p}_{k-1}\tau_{k-1}^i+(1-\varepsilon)\,t_k^i-\sum_{l=1}^{k}\bar{q}_lu_l^i=0,\quad t_1=1,$$
$$2+\sum\bar{p}=\sum\bar{q},\ \varepsilon>0,\quad i=2\nu+1,\ldots,\ 2\nu+2k-1.$$

Число различных среди параметров, отвечающих какому-либо экстремальному значению $\rho(2\nu+2k,\varepsilon)$, не превосходит $2k$. Если число отличных друг от друга и от нуля среди них меньше $2k$, то по лемме 1 соответствующие связи (8,8) вырождаются в тождества. Если число отличных друг от друга и от нуля равно $2k$, то либо ни один параметр не равен нулю, либо равно нулю одно τ или u, а все остальные параметры различны между собой. Во всех случаях $\rho(2\nu+2k,\varepsilon)>0$; в первом и во втором — в силу леммы 3, так как сумма коэфициентов при отличных от нуля параметрах t, τ меньше суммы коэфициентов при u, а в третьем — потому, что среди u имеется только $k-1$ отличных от нуля. Остается

рассмотреть случай (если он вообще возможен), когда t_k стремится к $-\infty$. Разделив все связи (8,8) на соответствующие степени t_k, получим в пределе

$$\bar{p}_1\tau_1'^i+\ldots+\bar{p}_{k-1}\tau_{k-1}'^i+(1-\varepsilon)\,t_k'^i=\bar{q}_1u_1'^i+\ldots+\bar{q}_ku_k'^i,\quad t_k'=1.$$

В силу того, что сумма коэфициентов при τ', t' не может быть равна сумме коэфициентов при u', все $2k$ параметров отличны друг от друга и от нуля. Сумма коэфициентов при τ', t' меньше суммы коэфициентов при u', и по лемме 3

$$\bar{p}'\tau_1'^{2\nu+2k}+\ldots+(1-\varepsilon)\,t_k'^{2\nu+2k}-\bar{q}_1u_1'^{2\nu+2k}-\ldots-\bar{q}_ku_k'^{2\nu+2k}>0.$$

Следовательно, при t_k, стремящемся к $-\infty$, $\rho(2\nu+2k,\varepsilon)$ стремится к $+\infty$.

Итак, для любого $\varepsilon>0$ при связях (8,8) $\rho(2\nu+2k,\varepsilon)$ неотрицательно и обращается в нуль только в тривиальном случае вырождения (8,8) в тождества. Заставляя ε стремиться к нулю и переходя к пределу, получим, что $\rho(2\nu+2k)\geqslant 0$. Как и в теореме 4, убеждаемся, что равенство достигается лишь в случае тождества.

Таким образом все экстремумы функции $\rho(2\nu+2k)$ при связях (8,1) и условиях (8,2) неотрицательны и равны нулю только когда (8,1) вырождаются в тождества. Теорема полностью доказана.

Отсюда непосредственно получаем:

Следствие. *При любых значениях s_i только одна из всех возможных систем*

$$s_i=t_1^i+p_1\tau_1^i+t_2^i+\ldots+p_{k-1}\tau_{k-1}^i+t_k^i\quad(i=2\nu+1,\ \ldots,\ 2\nu+2k-1),$$

где p — любые целые положительные числа, удовлетворяющие соотношению

$$k+\sum p=m,$$

возможно, имеет решение, удовлетворяющее неравенствам (8,2), *и эта система имеет только одно такое решение.*

Отсюда вытекает, что всякая точка (s_i) вида (4,8) принадлежит верху $D_m(s_{2\nu+1},\ldots,s_{2\nu+2k})$ и что со всякой прямой, параллельной оси $s_{2\nu+2k}$, верх D_m пересекается не более чем в одной точке.

§ 9. Низ квазидискриминантной поверхности $D_m(s_{2\nu+1},\ldots,s_{2\nu+2k})$. Каждая точка низа $D_m(s_{2\nu+1},\ldots,s_{2\nu+2k})$ допускает представление вида (4,6). Так как каждая точка $A_m(s_{2\nu+1},\ldots,s_{2\nu+2k-1})$ является проекцией некоторой точки низа $D_m(s_{2\nu+1},\ldots,s_{2\nu+2k})$ на пространство $(s_{2\nu+1},\ldots,s_{2\nu+2k-1})$, то каждая точка $A_m(s_{2\nu+1},\ldots,s_{2\nu+2k-1})$ допускает представление вида

$$s_i=p_1\tau_1^i+t_1^i+p_2\tau_2^i+\ldots+t_{k-1}^i+p_k\tau_k^i, \tag{9,1}$$

где $k-1+\sum p=m$, и

$$\tau_1\geqslant t_1\geqslant\tau_2\geqslant\ldots\geqslant t_{k-1}\geqslant\tau_k. \tag{9,2}$$

Многообразие точек пространства $(s_{2\nu+1},\ldots,s_{2\nu+2k-1})$, допускающих представление (9,1) с данными p, обозначим через $A(p_1,\ldots,p_k)$. Многообразие $A_m(s_{2\nu+1},\ldots,s_{2\nu+2k-1})$ разбивается на сумму многообразий

$A(p_1, \ldots, p_k)$, когда $p_1, \ldots, p_k$ пробегают все возможные значения, удовлетворяющие соотношению $k-1+\sum p=m$. Нижеследующая теорема 9 показывает, что разные $A(p_1, \ldots, p_k)$ могут иметь общими только точки границы.

Теорема 8. *Из равенств*

$$\rho(i)=p_1\tau_1^i+t_1^i+\ldots+p_k\tau_k^i-\sum_{l=1}^{m'}q_lu_l^i=0 \tag{9,3}$$

$$(i=2\nu+1, \ldots, 2\nu+2k-2),$$

где параметры и коэфициенты связаны условиями

$$\tau_1\geqslant t_1\geqslant\ldots\geqslant\tau_k, \quad u_1\geqslant u_2\geqslant\ldots\geqslant u_{m'}, \tag{9,4}$$

$$p_1<q_1, \quad k-1+\sum p=\sum q, \tag{9,5}$$

в случае, когда равенства (9,3) *не вырождаются в простые тождества, следует*

$$\rho(2\nu+2k-1)>0.$$

Доказательство. Рассуждение протекает так же, как при доказательстве теоремы 5. Наложим на параметры t, τ ограничение

$$1\geqslant\tau_1\geqslant\ldots\geqslant\tau_k\geqslant-1 \tag{9,6}$$

и исследуем знак всех экстремальных и граничных значений функции $\rho(2\nu+2k-1)$ при связях (9,3) и условиях (9,6).

Если параметр τ_1 совпадает с τ_2, то связи (9,3) должны принять вид

$$\overline{s}_i=(p_1+p_2+1)\tau_2^i+t_2^i+\ldots+p_k\tau_k^i=\sum_{l=1}^{m'}q_lu_l^i, \tag{9,7}$$

и по предположению индукции точка $(s_{2\nu+1}, \ldots, s_{2\nu+2k-2})$ принадлежит низу $D_m(s_{2\nu+1}, \ldots, s_{2\nu+2k-2})$, так что связи (9,7) возможны только как тождества.

Если τ_1 совпадает с каким-нибудь параметром u_μ, коэфициент при котором $\geqslant p_1$, то связи должны принять вид

$$s_i'=t_1^i+\ldots+p_k\tau_k^i=q_1u_1^i+\ldots+(q_\mu-p_1)u_\mu^i+\ldots+q_{m'}u_{m'}^i \tag{9,8}$$

и по предположению индукции точка $(s'_{2\nu+1}, \ldots, s'_{2\nu+2k-1})$ принадлежит верху $D_{k-1+p_1+\ldots+p_k}(s_{2\nu+1}, \ldots, s_{2\nu+2k-1})$ и, следовательно, соответствующее значение $\rho(2\nu+2k-1)$ равно нулю, когда (9,8) вырождаются в тождества, и положительно, если это не имеет места.

Граница выполняемости условий (9,6) при связях (9,3) достигается либо когда среди t, τ имеется не более $k-1$ отличных друг от друга и от нуля, либо когда среди u имеется не более $k-1$ отличных друг от друга и от нуля. В обоих случаях в силу предположения индукции связи (9,3) могут иметь место для этих значений только как тождества.

Как при доказательстве теоремы 4, доказываем, что для всех экстремумов $\rho(2\nu+2k-1)$, получающихся при закреплении только одного из двух параметров $\tau_1=1$, $\tau_k=-1$, связи (9,3) вырождаются в тождества. Для экстремума второй категории при фиксированных $\tau_1=1$ и $\tau_k=-1$, исключая случай полного тождества и случай, когда τ_1 со-

впадает с одним из параметров u, коэфициент при котором $\geqslant p_1$, и когда, следовательно, значение $\rho(2\nu+2k-1)>0$, — связи (9,3) должны принять вид

$$(9,9)\qquad \sum_{l=1}^{k}\bar{p}_l\bar{\tau}_l^i=\sum_{l=1}^{k}\bar{q}_l\bar{u}_l^i \quad (i=2\nu+1,\ldots,\ 2\nu+2k-2),$$

где

$$\sum\bar{p}=\sum\bar{q} \quad \text{и} \quad 1=\bar{\tau}_1>\ldots>\bar{\tau}_k,\quad \bar{u}_1>\ldots>\bar{u}_k\ ^{25}).$$

Один из параметров τ, u может обращаться в нуль. Коэфициент $\bar{p}_1$ может быть больше $\bar{q}_1$ только в том случае, когда u_1 совпадает с некоторыми из промежуточных параметров t, τ. В этом случае $\bar{\tau}_1$ непременно больше $\bar{u}_1$. Это следует из того, что если $u_1=t_1$ и отлично от всех других параметров t, τ, то $\bar{p}_1=p_1\leqslant q_1-1\leqslant\bar{q}_1$. Если же u_1 совпадает с некоторыми другими параметрами t_μ, τ_μ, то в силу того, что τ_1 больше τ_2 (в противном случае связи вырождаются в тождества), $\bar{\tau}_1>\tau_\mu=u_1\geqslant\bar{u}_1$ [26]).

Если $\bar{p}_1\leqslant\bar{q}_1$, то положительность соответствующего значения $\rho(2\nu+2k-1)$ доказывается точно так же, как и в теореме 4. Если $\bar{p}_1>\bar{q}_1$, то доказательство тоже остается почти таким же. Опять определяем для любого положительного ε функцию

$$\rho(2\nu+2k-1,\varepsilon)=\bar{p}_1\tau_1^{2\nu+2k-1}+\ldots+(\bar{p}_k+\varepsilon)\tau_k^{2\nu+2k-1}-\sum_{l=1}^{k}\bar{q}_l\bar{u}_l^{2\nu+2k-1}$$

и рассматриваем все ее экстремумы и граничные значения при связях

$$(9,10)\quad \bar{p}_1\tau_1^i+\ldots+(\bar{p}_k+\varepsilon)\tau_k^i-\sum_{l=1}^{k}\bar{q}_l\bar{u}_l^i=0 \quad (i=2\nu+1,\ldots,\ 2\nu+2k-2)$$

и добавочном условии

$$1=\tau_1\geqslant u_1.$$

Среди параметров, отвечающих какому-нибудь экстремальному или граничному значению $\bar{\rho}(2\nu+2k-1,\varepsilon)$, имеется не более $2k-1$ различных между собой. Если среди них не более $2k-2$ отличных от нуля, то связи (9,10) для этих значений вырождаются в тождества. Если число отличных друг от друга и от нуля параметров равно $2k-1$, то, как это следует из хода доказательства леммы 6, из неравенства $1=\tau_1\geqslant u_1$ следует положительность соответствующих значений $\rho(2\nu+2k-1,\varepsilon)$.

Остается рассмотреть возможно имеющий место случай, когда τ_k стремится к $-\infty$. Разделив (9,10) на степени $|\tau_k|$, получим

$$\bar{p}_2\tau_2'^i+\ldots+(\bar{p}_k+\varepsilon)\tau_k'^i=\bar{q}_1u_1'^i+\ldots+\bar{q}_ku_k'^i,\quad \tau_k'=-1.$$

---

[25]) Если бы в этих соотношениях где-нибудь имелся знак равенства, то связи (9,9) выродились бы в тождества.

[26]) Напоминаю, что в $\bar{\tau}$ собраны те отличные друг от друга значения параметров t, τ, u, коэфициенты при которых положительны, а в $\bar{u}$ — те, коэфициенты при которых отрицательны. Как $\bar{\tau}$, так и $\bar{u}$ нумеруются в порядке убывания. Если u_1 отлично от u_2 и совпадает с некоторым τ, при котором стоит коэфициент $\geqslant q_1$, то для $\bar{u}_1$ берется значение u_2.

Здесь все τ', u' отличны от нуля, так как тождество невозможно. Неравенство $1=\tau_1\geqslant u_1$ переходит здесь в неравенство $0>u'$. Так как все u' отрицательны, то

$$\bar{p}_2\tau_2'^{2\nu+2k-1}+\ldots+(\bar{p}_k+\varepsilon)\tau_k'^{2\nu+2k-1}-\sum_{l=1}^{k}\bar{q}_l u_l'^{2\nu+2k-1}>0,$$

и $\rho(2\nu+2k-1,\varepsilon)$ при $\tau_k\to-\infty$ стремится к $+\infty$.

Итак, при любом $\varepsilon>0$ $\rho(2\nu+2k-1,\varepsilon)\geqslant 0$, и обращение в нуль имеет место только в тривиальных случаях. Переходя к пределу и рассуждая как в конце доказательства теоремы 4, видим, что $\rho(2\nu+2k-1)$ при связях (9,9) положительно. Итак, все экстремумы и граничные значения $\rho(2\nu+2k-1)$ неотрицательны и обращаются в нуль только в тривиальном случае вырождения связей в тождества. Теорема полностью доказана [27]).

Теорема 9. *Каковы бы ни были величины s_i, только для одной из всех возможных комбинаций чисел p натурального ряда, удовлетворяющих условию*

$$k-1+\sum p=m \quad (m-\text{фиксированное число}), \tag{9,11}$$

система

$$s_i=p_1\tau_1^i+t_1^i+p_2\tau_2^i+\ldots+t_{k-1}^i+p_k\tau_k^i \tag{9,12}$$
$$(i=2\nu+1,\ldots,\ 2\nu+2k-1),$$

возможно, имеет решение, подчиняющееся неравенствам

$$\tau_1\geqslant t_1\geqslant\tau_2\geqslant\ldots\geqslant t_{k-1}\geqslant\tau_k. \tag{9,4'}$$

Если такая система существует, то она имеет только одно решение, удовлетворяющее (9,4').

Доказательство. Допустим, что теорема неверна. Это значит, что существуют такие p, q (q могут совпадать с p), t, τ, v, u, что имеют место равенства

$$\rho(i)=\sum_{\mu=1}^{k-1}t_\mu^i+\sum_{l=1}^{k}p_l\tau_l^i-\sum_{\mu=1}^{k-1}v_\mu^i-\sum_{l=1}^{k}q_l u_l^i=0 \tag{9,13}$$
$$(i=2\nu+1,\ldots,\ 2\nu+2k-1),$$

где $\sum q=\sum p$, t, τ удовлетворяют (9,4'), а v, u — аналогичным неравенствам

$$u_1\geqslant v_1\geqslant u_2\geqslant\ldots\geqslant v_{k-1}\geqslant u_k. \tag{9,4''}$$

Из предыдущей теоремы следует, что $p_1=q_1$, $p_k=q_k$, так как в противном случае $\rho(2\nu+2k-1)$ не могло бы обращаться в нуль.

Заметим, что при $\tau_1=u_1$ равенства (9,13) сводятся к равенствам

$$\sum_{\mu=1}^{k-1}t_\mu^i+\sum_{l=2}^{k}p_l\tau_l^i=\sum_{\mu=1}^{k-1}v_\mu^i+\sum_{l=2}^{k}q_l u_l^i,$$

---

[27]) Из этой теоремы следует, что при $p_1<q_1$, $p_k<q_{m'}$, $k-1+\Sigma p=\Sigma q$ система (9,3) не может иметь решений вида (9,4).

где $\sum p = \sum q$. По теореме 6 эти равенства могут выполняться только в случае тождества. Итак, при $\tau_1 = u_1$ равенства (9,13) выполняются только как тождества.

Обозначим через K ту часть пространства (t, τ), лежащую в угле (9,4′), координаты точек которой удовлетворяют соотношениям (9,13) при добавочном условии $\tau_1 \geqslant u_1$. K, очевидно, является замкнутым многообразием. Покажем, что K состоит только из таких точек, для которых (9,13) вырождаются в тождества. Для этого рассмотрим функцию $\rho(2\nu + 2k - 1)$ при связях $\rho(j) = 0$ $(j = 2\nu + 1, \ldots, 2\nu + 2k - 2)$ и добавочном условии $\tau_1 \geqslant u_1$. Достаточно доказать, что при указанных условиях $\rho(2\nu + 2k - 1)$ всегда неотрицательно, причем обращение в нуль имеет место только в случае вырождения связей в тождества.

Как всегда, наложим ограничение $1 \geqslant \tau_1 \geqslant t_1 \geqslant \ldots \geqslant \tau_k = -1$.

Для экстремальных и граничных значений связи либо вырождаются в тождества, либо принимают вид

$$\sum_{l=1}^{k} \bar{p}_l \bar{\tau}_l^i = \sum_{l=1}^{k} \bar{q}_l \bar{u}_l^i \quad (i = 2\nu + 1, \ldots, 2\nu + 2k - 2),$$

где $\sum \bar{p} = \sum \bar{q}$, одно из значений $\bar{\tau}$ или $\bar{u}$ может быть равно нулю, и $1 = \bar{\tau}_1 > \bar{u}_1$.

Для доказательства неотрицательности экстремальных значений $\rho(2\nu + 2k - 1)$ рассмотрим функцию

$$\rho(2\nu + 2k - 1, \varepsilon) = \bar{p}_1 \tau_1^{2\nu+2k-1} + \ldots + \bar{p}_{k-1} \tau_{k-1}^{2\nu+2k-1} + (\bar{p}_k + \varepsilon)\, \tau_k^{2\nu+2k-1}$$

при связях

$$\bar{p}_1 \bar{\tau}_1^i + \ldots + (\bar{p}_k + \varepsilon)\, \bar{\tau}_k^i - \sum_{l=1}^{k} \bar{q}_l \bar{u}_l^i \quad (i = 2\nu + 1, \ldots, 2\nu + 2k - 2) \tag{9,14}$$

и условии $1 = \bar{\tau}_1 \geqslant \bar{u}_1$. Все экстремумы и граничные значения этой функции неотрицательны. Действительно, эти значения соответствуют либо случаям, когда среди $\bar{\tau}$, $\bar{u}$ имеется не более $2k - 1$ различных значений, либо случаям, когда $\bar{\tau}_k$ стремится к $-\infty$.

Если $\bar{\tau}_k$ стремится к $-\infty$, то, разделив (9,14) на соответствующие степени $|\bar{\tau}_k|$, придём к связям

$$\bar{p}_2 \tau_2'^i + \ldots + (\bar{p}_k + \varepsilon)\, \tau_k'^i = \sum_{l=1}^{k} \bar{q}_l \bar{u}_l'^i, \quad \tau_k' = -1.$$

Неравенство $\bar{\tau}_1 \geqslant \bar{u}_1$ переходит здесь в $0 \geqslant u_1'$. Так как сумма коэфициентов при τ' — нецелое число, то $0 > u_1'$,

$$\bar{p}_1 \tau_1'^{2\nu+2k-1} + \ldots + (\bar{p}_k + \varepsilon)\, \tau_k'^{2\nu+2k-1} - \sum_{l=1}^{k} \bar{q}_l u_l'^{2\nu+2k-1} > 0,$$

и $\bar{\rho}(2\nu + 2k - 1, \varepsilon)$ при $\bar{\tau}_k \to -\infty$ стремится к $+\infty$.

Если среди $\bar{\tau}$, $\bar{u}$ меньше $2k - 1$ отличных друг от друга и от нуля, то связи (9,14) вырождаются в тождества (это возможно только при $\bar{\tau}_k = 0$). Если среди $\bar{\tau}$, $\bar{u}$ ровно $2k - 1$ отличны друг от друга и от единицы, то имеются две возможности:

1. Среди $\bar{\tau}$ имеется k различных, среди $\bar{u}$ имеется $k-1$ различных.

2. Среди $\bar{\tau}$ имеется $k-1$ различных, среди $\bar{u}$ имеется k различных.

Так как в первом случае $\tau_1 = u_1$, то согласно лемме 6 соответствующее значение $\rho(2\nu+2k-1, \varepsilon)$ положительно.

Второй случай возможен только тогда, когда обращается в нуль одна из величин $\bar{\tau}_2, \ldots, \bar{\tau}_k$, так как в противном случае сумма коэфициентов при $k-1$ параметрах $\bar{\tau}$ была бы больше суммы коэфициентов при k параметрах u, что противоречит лемме 4; но тогда общее число различных между собой параметров равно $2k$.

Итак, при указанных условиях $\bar{\rho}(2\nu+2k-1, \varepsilon)$ всегда неотрицательно и обращается в нуль только в тривиальных случаях тождества. Заставляя ε стремиться к нулю и переходя к пределу, закончим так же, как в теореме 4.

Утверждение относительно функций $\rho(2\nu+2k-1)$ при связях $\rho(j)=0$ и условии $\tau_1 \geqslant u_1$ полностью доказано, и многообразие K состоит только из таких точек, для которых равенства (9,13) могут выполняться только как тождества.

Так как параметры τ, t, v, u входят в условие теоремы симметрично, то это свойство имеет место и при условии $\tau_1 \leqslant u_1$, и теорема полностью доказана.

Можно также доказать следующую теорему, которая в дальнейшем не нужна, и доказательство которой я поэтому опускаю:

Теорема. *Пусть α — положительные, а s — произвольные вещественные постоянные. Система*

$$\alpha_1 u_1^i + \ldots + \alpha_n u_n^i = s_i \quad (i = 2\nu+1, \ldots, 2\nu+n)$$

может иметь самое большее одно решение, удовлетворяющее неравенствам

$$u_1 \geqslant u_2 \geqslant \ldots \geqslant u_n.$$

Так как в § 5 показано, что каждая точка низа $D_m(s_{2\nu+1}, \ldots, s_{2\nu+2k})$ допускает представление вида (4,6), (4,7), то из только что доказанной теоремы следует, что со всякой прямой, параллельной оси $s_{2\nu+2k}$, низ D_m либо совсем не пересекается, либо пересекается в одной точке, и что, обратно, всякая точка вида (4,6), (4,7) принадлежит низу D_m. Этому можно дать следующую аналитическую формулировку:

Теорема 10. *Из равенств*

$$\rho(i) = p_1\tau_1^i + t_1^i + \ldots + p_k\tau_k^i - \sum_{\mu=1}^{m} u_\mu^i = 0 \tag{9,15}$$

$$(i = 2\nu+1, \ldots, 2\nu+2k-1),$$

где t, τ удовлетворяют обычным неравенствам (9,4) *и p — целые положительные числа, удовлетворяющие условию $k-1+\sum p = m$, следует*

$$\rho(2\nu+2k) \leqslant 0.$$

Равенство может иметь место только тогда, когда (9,15) *вырождаются в тождества.*

Так как все свойства квазидискриминантных поверхностей, которыми мы пользовались при доказательствах, опираясь на предположение индукции, имеют место в пространстве (s_{2k-1}, s_{2k}) (то, что в § 2 было сказано относительно (s_1, s_2), очевидно, верно для любого (s_{2k-1}, s_{2k})), то все утверждения о свойствах квазидискриминантных поверхностей в любом пространстве $(s_{2\nu+1}, \ldots, s_n)$ полностью доказаны.

§ 10. Однозначность канонического представления. В § 5 было доказано, что единственные возможные границы многообразия $\mathfrak{K}_{m+1}$ — это поверхности D_m и D_{m+1}, и отсюда в силу связности замкнутого многообразия $A_{m+1} - A_m + D_m$ делался вывод, что $\mathfrak{K}_{m+1} \supseteq A_{m+1} - A_m + D_m$.

Обе поверхности D_{m+1} и D_m принадлежат $\mathfrak{K}_{m+1}$, и D_{m+1} безусловно является частью границы $\mathfrak{K}_{m+1}$. Если бы D_m не принадлежало целиком границе $\mathfrak{K}_{m+1}$, то многообразие $\mathfrak{K}_{m+1}$ совпадало бы с многообразием A_{m+1}. Действительно, допустим, что некоторая точка P поверхности D_m является внутренней точкой для $\mathfrak{K}_{m+1}$ и некоторая внутренняя точка P' многообразия A_m не принадлежит $\mathfrak{K}_{m+1}$. Соединим точки P и P' кривой, лежащей целиком, за исключением конца P, внутри A_m[28]). На этой кривой должна находиться хотя бы одна граничная точка многообразия $\mathfrak{K}_{m+1}$; но это противоречит тому, что единственные возможные границы — это D_m и D_{m+1}. Итак, чтобы доказать, что D_m служит частью границы, достаточно показать невозможность равенства $\mathfrak{K}_{m+1} = A_{m+1}$. Докажем это отдельно для пространств нечетного и четного чисел измерений.

I. Рассмотрим ту часть $A(s_{2\nu+1}, \ldots, s_{2\nu+2k+1})$, координаты точек которой представляются в виде $s_l = \sum_{\mu=1}^{m} u_\mu^l$, где все параметры u неотрицательны.

Каноническое представление в пространстве $(s_{2\nu+1}, \ldots, s_{2\nu+2k+1})$ имеет либо вид (4,4), либо вид (4,5).

Докажем, что если параметры канонического представления удовлетворяют условиям (4,4), то из равенств

$$\rho(i) = \sum_{\mu=1}^{k} t_\mu^i + \alpha^i + \sum_{\mu=1}^{k} p_\mu \tau_\mu^i - \sum_{l=1}^{m} u_l^i = 0 \qquad (10,1)$$

$$(i = 2\nu+1, \ldots, 2\nu+2k; \quad k + \sum p = m)$$

следует

$$\rho(2\nu + 2k + 1) \geqslant 0,$$

и знак равенства возможен только в случае тождества.

Так как все u положительны, то t_1 тоже положительно, а τ_k при закрепленном значении t_1, например, $t_1 = 1$, ограничено по абсолютному значению. Определим знак всех экстремальных и граничных значений $\rho(2\nu + 2k + 1)$ при связях (10,1) и добавочных условиях, что все u

---

[28]) Если $P'(s')$ — внутренняя, а $P(s)$ — произвольная точка A_m и $s_l' = \sum_{\mu=1}^{m} u_\mu'^l$, $s_l = \sum_{\mu=1}^{m} u_\mu^l$, то, непрерывно меняя параметры u' так, чтобы между ними все время было не менее n различных между собой и чтобы они в конце концов совпали с u, получим нужную кривую.

неотрицательны и $t_1 = 1$. Так как $|\tau_k|$ ограничен, то обычным путем найдем, что среди параметров, отвечающих какому-либо экстремальному или граничному значению функции $\rho(2\nu + 2k + 1)$, не более $2k + 1$ отличных друг от друга и от нуля [29]). Если число таких параметров меньше $2k + 1$, то соответствующие связи (10,1) сводятся к тождествам. Если число параметров, отличных друг от друга и от нуля, равно $2k + 1$, то имеются две возможности: 1) среди t, α, τ содержится $k + 1$ отличных друг от друга и от нуля, а среди u содержится k отличных друг от друга и от нуля; 2) среди t, α, τ содержится k отличных друг от друга и от нуля, а среди u содержится $k + 1$ отличных друг от друга и от нуля.

Во втором случае, согласно лемме 4, сумма коэфициентов при оставшихся t, α, τ должна быть меньше суммы коэфициентов при оставшихся u. Отсюда следует, что некоторые из параметров t, α, τ обращаются в нуль; но, как видно из (4,4), точки, для которых некоторые из этих параметров обращаются в нуль, принадлежат верху $D_m(s_{2\nu+1}, \ldots, s_{2\nu+2k+1})$. Так как число параметров u не превосходит m, то соответствующее значение $\rho(2\nu + 2k + 1)$ положительно. С другой стороны, так как среди u имеется $k + 1$ различных положительных величин, а среди t, α, τ — только k различных, то, как это было показано при доказательстве леммы 6, $\rho(2\nu + 2k + 1)$ при связях (10,1) должно быть отрицательно. Из этого противоречия видно, что второй случай невозможен.

В первом случае среди t, α, τ имеется $k + 1$ отличных друг от друга и от нуля; но легко заметить, что когда среди параметров, удовлетворяющих (4,4), имеется только $k + 1$ отличных друг от друга и от нуля, то либо точка, координаты которой представляются с помощью степенных сумм этих параметров, принадлежит верху $D_{m'}(s_{2\nu+1}, \ldots, s_{2\nu+2k+1})$, где m' — сумма коэфициентов при оставшихся параметрах t, α, τ, либо все оставшиеся параметры положительны [30]). Так как m' по лемме 4 больше, чем сумма коэфициентов при оставшихся значениях параметров u, то в обоих случаях соответствующие значения $\rho(2\nu + 2k + 1)$ положительны.

Итак, все экстремальные и граничные значения функции $\rho(2\nu + 2k + 1)$ неотрицательны, причем обращение в нуль имеет место только при тождестве. Это доказывает утверждение.

Если бы параметры удовлетворяли не (4,4), а (4,5), то совершенно аналогично было бы доказано, что при сохранении всех остальных условий $\rho(2\nu + 2k + 1) \leqslant 0$, и обращение в нуль достигается только при тождестве.

II. Пространство $(s_{2\nu+1}, \ldots, s_{2\nu+2k})$.

Ход рассуждений разнится от предыдущего только в некоторых частностях. Опять рассмотрим ту часть многообразия $A_m(s_{2\nu+1}, \ldots, s_{2\nu+2k})$, координаты точек которой представимы с помощью степенных сумм неотрицательных параметров.

Параметры канонического представления в пространстве $(s_{2\nu+1}, \ldots, s_{2\nu+2k})$ удовлетворяют либо условиям (4,11), либо условиям (4,10).

---

[29]) Нуль здесь играет особую роль, так как все u неотрицательны и в (4,4) $t \geqslant 0 \geqslant \alpha$.

[30]) Можно легко показать, что второе предположение невозможно.

А. Докажем, что если параметры удовлетворяют условиям (4,11), то из связей

$$(10,2)\qquad \rho(i)=\sum_{\mu=1}^{k} t_\mu^i+\alpha^i+\sum_{\mu=1}^{k-1} p_\mu\tau_\mu^i-\sum_{\mu=1}^{m} u_\mu^i=0$$
$$(i=2\nu+1,\ \ldots,\ 2\nu+2k-1;\ k+\sum p=m)$$

при дополнительном условии, что все $u\geqslant 0$, следует $\rho(2\nu+2k)\geqslant 0$, и обращение в нуль возможно только при тождестве.

Так как все u неотрицательны, то $t_1>0$, и при фиксированном значении t_1, например, $t_1=1$, все параметры ограничены по абсолютному значению. Как и выше, найдем, что достаточно исследовать значения $\rho(2\nu+2k)$, когда среди t, α, τ, u имеется не более $2k$ отличных друг от друга и от нуля. Если таких параметров имеется меньше $2k$, то связи (10,2) обращаются в тождества, и соответствующие значения $\rho(2\nu+2k)$ равны нулю. В силу лемм 1 и 4 мыслимы следующие случаи:

1) среди t, α, τ имеется $k+1$ отличных друг от друга и от нуля, среди u — всего $k-1$;

2) среди t, α, τ имеется k отличных друг от друга и от нуля, и среди u имеется k различных;

3) среди t, α, τ имеется $k-1$ отличных друг от друга и от нуля, среди u имеется k отличных друг от друга и от нуля.

1. В этом случае непосредственно видно (см. стр. 135), что соответствующее значение $\rho(2\nu+2k)$ положительно.

2. В этом случае связи (10,2) должны принять вид

$$(10,3)\qquad \bar{s}_i=\sum_{\mu=1}^{k}\bar{p}_\mu\bar{\tau}_\mu^i=\sum_{\mu=1}^{k}\bar{q}_\mu\bar{u}_\mu^i\qquad (i=2\nu+1,\ \ldots,\ 2\nu+2k-1),$$

где один из коэфициентов $\bar{p}$ равен единице, и поэтому точка $(\bar{s}_i)$ принадлежит $D_\Sigma\bar{p}\,(s_{2\nu+1},\ \ldots,\ s_{2\nu+2k-1})$; следовательно, равенства (10,3) могут иметь место только при $\sum\bar{p}<\sum\bar{q}$; но тогда, согласно лемме 3, $\rho(2\nu+2k)>0$.

3. В этом случае (10,2) принимают вид

$$\bar{s}_i=\bar{p}_1\bar{\tau}_1^i+\ldots+\bar{p}_{k-1}\bar{\tau}_{k-1}^i=\bar{q}_1\bar{u}_1^i+\ldots+\bar{q}_{k+1}\bar{u}_{k+1}^i.$$

Так как при положительных u форма $\sum_{i,j=0}^{k-1}\bar{s}_{2\nu+1+i+j}x_ix_j$ не вырождается, то этот случай вообще невозможен. Утверждение А целиком доказано.

Б. Пусть параметры t, α, τ удовлетворяют условию (4,10). Докажем, что если все $u\geqslant 0$, то из связей $\rho(i)=0$ [31]) следует $\rho(2\nu+2k)\leqslant 0$, причем обращение в нуль возможно только в случае тождества. Опять достаточно исследовать $\rho(2\nu+2k)$, когда среди t, α, τ, u всего $2k$ от-

---

[31]) Эти связи имеют вид

$$\rho(i)=\sum_{\mu=1}^{k-1} t_\mu^i+\alpha^i+\sum_{\mu=1}^{k} p_\mu\tau_\mu^i-\sum_{\mu=1}^{m} u_\mu^i=0$$
$$(i=2\nu+1,\ \ldots,\ 2\nu+2k-1;\ k-1+\sum p=m).$$

личных друг от друга и от нуля. Имеются только три возможности, перечисленные в пункте А.

1. В этом случае связи должны принять вид

$$\bar{s}_i = \sum_{\mu=1}^{k+1} \bar{p}_\mu \bar{\tau}_\mu^i = \sum_{\mu=1}^{k-1} \bar{q}_\mu \bar{u}_\mu^i \quad (i = 2\nu+1, \ldots, 2\nu+2k-1). \tag{10,4}$$

В силу теоремы 9 все промежуточные p отличны от единицы; но так как t, τ подчиняются условиям (4,10), то это может быть только тогда, когда все $\bar{\tau}$ положительны; однако при положительных $\bar{\tau}$ форма $\sum_{j,l=0}^{k-1} \bar{s}_{2\nu+1+j+l} x_j x_l$ не вырождается, и связи (10,4) не могут иметь места. Случай 1) невозможен.

2. Связи примут вид (10,3). Если хоть один из параметров t, τ, α обращается в нуль, то соответствующая точка $(s_{2\nu+1}, \ldots, s_{2\nu+2k})$ принадлежит низу $D_m(s_{2\nu+1}, \ldots, s_{2\nu+2k})$, и поэтому соответствующее значение $\rho(2\nu+2k)$ отрицательно. Если все t, τ, α отличны от нуля, то $\sum \bar{p} > \sum \bar{q}$ и, согласно лемме 3, $\rho(2\nu+2k) < 0$.

3. Связи должны принять вид (10,3), а это, как было доказано выше, невозможно.

Пункт Б полностью доказан, и, следовательно, в пространстве $(s_{2\nu+1}, \ldots, s_{2\nu+2k})$ $\mathfrak{R}_{m+1}$ тоже не совпадает с A_{m+1}. Отсюда следует, что в любом пространстве D_m принадлежит границе $\mathfrak{R}_{m+1}$ и справедливо равенство

$$\mathfrak{R}_{m+1} = A_{m+1} - A_m + D_m. \tag{10,5}$$

Заметим, что если точка (s_i) лежит на D_m или D_{m+1}, то ее представление в $\mathfrak{R}_{m+1}$ определяется однозначно. Пусть, для определенности, $n = 2k+1$ и для точки (s_i), лежащей на D_m, наше утверждение неверно. Тогда

$$s_i = \sum_{\mu=1}^{k} t_\mu^i + \sum_{\mu=1}^{k} p_\mu \tau_\mu^i = \sum_{\mu=1}^{k+1} v_\mu^i + \sum_{\mu=1}^{k} q_\mu u_\mu^i, \quad \sum p = \sum q$$
$$(i = 2\nu+1, \ldots, 2\nu+2k+1),$$

где параметры t, τ удовлетворяют либо условию (4,2), либо условию (4,3), а параметры v, u — либо условию (4,4), либо условию (4,5). Так как среди t, τ, u, v имеется не менее $2k+2$ различных между собой, то равенство

$$\sum_{\mu=1}^{k} t_\mu^i + \sum_{\mu=1}^{k} p_\mu \tau_\mu^i = \sum_{\mu=1}^{k+1} v_\mu^i + \sum_{\mu=1}^{k} q_\mu u_\mu^i$$

можно всегда так продолжить, что все t, τ, u, v становятся различными между собой и продолжают подчиняться наложенным на них условиям. Но точка

$$s_i = \sum_{\mu=1}^{k+1} v_\mu^i + \sum_{\mu=1}^{k} q_\mu u_\mu^i \quad (i = 2\nu+1, \ldots, 2\nu+2k+1),$$

у которой все v, u различны, является внутренней и не может лежать на D_m.

Теперь легко доказать основную теорему работы — теорему однозначности канонического представления.

Теорема 11. *Всякая точка* $(s_{2\nu+1}, \ldots, s_{2\nu+n})$, *координаты которой допускают представление в виде соответствующих степенных сумм некоторого числа вещественных параметров, допускает каноническое представление, и это каноническое представление однозначно определяется заданием точки.*

Доказательство. Так как всякая точка, координаты которой допускают представление в виде степенных сумм, принадлежит некоторому многообразию $A_{m+1} - A_m$, то соотношение $\mathfrak{R}_{m+1} = A_{m+1} - A_m + D_m$ доказывает первую часть теоремы.

Допустим, что однозначность канонического представления не имеет места. Тогда должны существовать две такие системы параметров t, τ, u, v, удовлетворяющих требованиям, предъявляемым к параметрам канонического представления, и две такие системы коэфициентов p, q, что удовлетворяются соотношения

$$(10,6)\quad \sum_{\mu} t_{\mu}^{i} + \sum_{l} p_l \tau_l^i = \sum_{\mu} v_{\mu}^{i} + \sum_{l} q_l u_l^i \quad (i = 2\nu+1, \ldots, 2\nu+n).$$

Исследуем при этих связях и при добавочном условии $|t| \leqslant 1$, $|\tau| \leqslant 1$ функцию

$$\rho(2\nu+n+1) = \sum t^{2\nu+n+1} - \sum p\tau^{2\nu+n+1} - \sum v^{2\nu+n+1} - \sum q u^{2\nu+n+1}.$$

Пусть сумма коэфициентов при t, τ равна $m+1$. Формула (10,5) показывает, что связи (10,6) могут иметь место только тогда, когда сумма коэфициентов при v, u тоже равна $m+1$. Среди параметров, отвечающих какому-либо экстремальному или граничному значению функции $\rho(2\nu+n+1)$, имеется не более $n+2$ отличных друг от друга и от нуля. Рассмотрим отдельно: а) случай четного n, $n = 2k$, б) случай нечетного n, $n = 2k+1$.

а) $n = 2k$. Имеются три возможности: 1) среди t, τ содержится k отличных друг от друга и от нуля, среди v, u — не более $k+2$; 2) среди t, τ содержится $k+1$ отличных друг от друга и от нуля, среди v, u — не более $k+1$; 3) среди t, τ содержится $k+2$ отличных друг от друга и от нуля, среди v, u — всего k.

1. Если связи (10,6) не вырождаются в тождества, то сумма коэфициентов при оставшихся t, τ меньше суммы коэфициентов при оставшихся v, u и, значит, хотя бы одно t равно нулю. Поставим обратно на свои места те из параметров t, τ, v, u, которые были равны друг другу и взаимно уничтожались. Так как хотя бы одно t равно нулю, то точка $(s'_{2\nu+1}, \ldots, s'_{2\nu+n})$, где

$$s'_i = \sum t^i + \sum p\tau^i$$

и одно из t равно нулю, принадлежит $D_m(s_{2\nu+1}, \ldots, s_{2\nu+2k})$, и соответствующие связи (10,6) могут иметь место только как тождества.

2. Если суммы коэфициентов при оставшихся параметрах t, τ и v, u не равны друг другу, то повторяем приведенное рассуждение. Если эти суммы равны, то в силу теоремы 6 соответствующие связи (10,6) возможны только как тождества.

3. Ничем не отличается от 1.

Итак, во всех экстремальных и граничных значениях $\rho(2\nu+2k+1)=0$. Отсюда следует, что при связях (10,6) функция $\rho(2\nu+2k+1)$ равна нулю, а это показывает, что сами связи (10,6) возможны только как тождества.

б) $n=2k+1$. Имеются четыре возможности: 1) среди t, τ содержится k отличных друг от друга и от нуля, среди v, u — не более $k+3$; 2) среди t, τ содержится $k+1$ отличных друг от друга и от нуля, среди v, u — не более $k+2$; 3) и 4) параметры t, τ меняются ролями с параметрами v, u.

1. Точно так же, как и в а1), доказывается, что соответствующие связи (10,6) вырождаются в тождества.

2. Связи (10,6) должны принять вид

$$\bar{s}_i = \sum_{\mu=1}^{n+1} \bar{p}_\mu \bar{\tau}^i_\mu = \sum_{\mu=1}^{k+2} \bar{q}_\mu \bar{u}^i_\mu, \tag{10,7}$$

где один из коэфициентов $\bar{p}$ равен единице. Соотношения (10,7) возможны только при $\sum \bar{p} < \sum \bar{q}$, так как точка $(\bar{s}_{2\nu+1}, \ldots, \bar{s}_{2\nu+2k+1})$ принадлежит $D_{\Sigma \bar{p}}(s_{2\nu+1}, \ldots, s_{2\nu+2k+1})$. Если $\sum \bar{p} < \sum \bar{q}$, то хотя бы одно t равно нулю, и рассуждение заканчивается как в а1). Соответствующие связи вырождаются в тождества.

3 и 4. Сводятся к разобранным случаям.

Получаем, что и для $n=2k+1$ из связей (10,6) следует равенство нулю функции $\rho(2\nu+n+1)$, т. е. и в этом случае связи (10,6) возможны только как тождества. Теорема однозначности полностью доказана.

§ 11. Решение экстремальной проблемы для $s_{2\nu}$ при заданных $s_{2\nu+1}, \ldots, s_{2\nu+n}$. Рассмотрим многообразие $A_m(s_{2\nu}, \ldots, s_{2\nu+n})$. Со всякой прямой, параллельной оси $s_{2\nu}$, граница этого многообразия либо совсем не пересекается, либо пересекается конечное число раз. Следовательно, можно определить понятие низа и верха этой границы относительно оси $s_{2\nu}$ (см. сноску [6])). Точка общего положения низа (и верха) границы имеет вид

$$s_i = \sum_{\mu=1}^{n} q_\mu u^i_\mu \quad (i=2\nu, \ldots, 2\nu+n), \tag{11,1}$$

где $\sum q \leqslant m$ и $u_1 > u_2 > \ldots > u_n$.

Если коэфициент при каком-нибудь параметре, стоящем на нечетном месте (см. § 4), отличен от единицы, то соответствующая точка $(s_{2\nu}, \ldots, s_{2\nu+n})$, где s_i определяются из (11,1), не может принадлежать низу границы.

В самом деле, пусть параметр u_l находится на нечетном месте и $q_l > 1$. Рассмотрим $u_1, \ldots, u_n$ как функции параметра α, определяемые системой

$$s_j = q_1 u^j_1 + \ldots + (q_l - 1) u^j_l + \alpha^j + q_{l+1} u^j_{l+1} + \ldots + q_n u^j_n \tag{11,2}$$
$$(j=2\nu+1, \ldots, 2\nu+n).$$

Так как

$$\left.\frac{du_l}{d\alpha}\right|_{\alpha=u_l} = -1,$$

то при достаточно малом уменьшении α

(11,3) $$u_1 > \ldots > u_l > \alpha > \ldots > u_n, \quad \alpha u_l > 0.$$

Пусть $s'_{2\nu} = q_1 u_1^{2\nu} + \ldots + (q_l - 1)\, u_l^{2\nu} + \alpha^{2\nu} + \ldots + q_n u_n^{2\nu}$. Простое вычисление (см. сноску [14])) дает

$$\frac{ds'_{2\nu}}{d\alpha} = 2\nu\alpha^{2\nu-1} \frac{(u_1 - \alpha)(u_2 - \alpha) \ldots (u_n - \alpha)}{u_1 u_2 \ldots u_n}.$$

Так как u_l стоит на нечетном месте, то при α, столь близком к u_l, что выполняется неравенство (11,3), $\frac{ds'_{2\nu}}{d\alpha} > 0$. Это показывает, что многообразие A_m содержит точки $(s'_{2\nu}, s_{2\nu+1}, \ldots, s_{2\nu+n})$, первая координата которых меньше $s_{2\nu}$ и сколь угодно мало от него отличается. Предложение доказано.

Из этого предложения следует, что точки низа границы $A_m(s_{2\nu}, \ldots, s_{2\nu+n})$ имеют вид

$$s_i = \sum t^i + \sum p\tau^i \quad (i = 2\nu, 2\nu+1, \ldots, 2\nu+n),$$

где $\sum t^j + \sum p\tau^j$ $(j = 2\nu+1, \ldots, 2\nu+n)$ — каноническое представление точки $(s_{2\nu+1}, \ldots, s_{2\nu+n})$ из $A_m(s_{2\nu+1}, \ldots, s_{2\nu+n})$. Так как каноническое представление точки $(s_{2\nu+1}, \ldots, s_{2\nu+n})$ однозначно определяется заданием этой точки, то со всякой прямой, параллельной оси $s_{2\nu}$, низ границы $A_m(s_{2\nu}, \ldots, s_{2\nu+n})$ пересекается не более, чем в одной точке, и если он пересекается с этой прямой, то при любом $m' > m$ низ границы многообразия $A_{m'}(s_{2\nu}, \ldots, s_{2\nu+n})$ пересекается с этой прямой в той же самой точке. Все это доказывает следующую теорему:

Теорема 12. *Если*

$$s_i = \sum t^i + \sum p\tau^i \quad (i = 2\nu+1, \ldots, 2\nu+n)$$

— каноническое представление точки $(s_{2\nu+1}, \ldots, s_{2\nu+n})$, *и*

$$s_i = \sum_{l=1}^{m} u_l^i \quad (i = 2\nu+1, \ldots, 2\nu+n)$$

— любое другое представление точки $(s_{2\nu+1}, \ldots, s_{2\nu+n})$, *то*

$$\sum t^{2\nu} + \sum p\tau^{2\nu} < \sum_{l=1}^{m} u_l^{2\nu}.$$

Легко показать, что теорема остается верной при $m = \infty$.

§ 12. Тело *R*-продолжаемых точек. Решение задачи 1, сформулированной во введении, сводится к определению той части n-мерного пространства $(s_1, \ldots, s_n)$, координаты точек которой представляются в виде соответствующих степенных сумм, и к нахождению критерия, позволяющего узнавать, принадлежит ли заданная точка этой части пространства или нет.

Условимся обозначать указанную часть пространства через $A_\infty(s_1, \ldots, s_n)$. Пусть точка $(s_1^{(0)}, \ldots, s_n^{(0)})$ принадлежит $A_\infty(s_1, \ldots, s_n)$. Но координаты представляются в виде степенных сумм некоторого числа параметров, и точка должна принадлежать некоторому многообразию

$\mathfrak{R}_{m+1}(s_1, \ldots, s_n) = A_{m+1}(s_1, \ldots, s_n) - A_m(s_1, \ldots, s_n)$ [32]). Следовательно задача 2 приводится к определению номера многообразия $\mathfrak{R}(s_1, \ldots, s_n)$ которому принадлежит рассматриваемая точка.

В силу теоремы 1 тело $A_\infty(s_1, \ldots, s_n)$ ограничено цилиндром, обра зующая которого параллельна оси s_1. Обозначим этот цилиндр чере $D_\infty(s_1, \ldots, s_n)$. Так как каждая точка тела A_∞ принадлежит некото рому R_m и D_m заключается внутри D_{m+1}, то D_∞ является пределом к которому стремится D_m при $m \longrightarrow \infty$. Слово предел здесь надо пони мать в том смысле, что к любой конечной части D_∞ равномерно стре мятся части D_m.

Со всякой прямой, параллельной оси s_n, $D_\infty(s_1, \ldots, s_n)$ либо совсе не пересекается, либо пересекается в двух точках.

Так как параметрические уравнения D_m известны, то можно опреде лить параметрические уравнения D_∞. Дадим подробный вывод эти уравнений для низа D_∞ при $n = 2k$. Точка $(\bar{s}_1, \ldots, \bar{s}_{2k})$, принадлежа щая низу D_∞, служит пределом последовательности точек $(s_1^{(m)}, \ldots, s_{2k}^{(m)})$ где точка с индексом m принадлежит низу D_m. Для каждой такой точки

(12,1) $$s_i^{(m)} = p_1^{(m)} \tau_1^{(m)\,i} + t_1^{(m)\,i} + \ldots + p_k^{(m)} \tau_k^{(m)\,i} \quad (i = 1, \ldots, 2k),$$

где $k - 1 + \sum p = m$ и

(12,2) $$\tau_1^{(m)} \geqslant t_1^{(m)} \geqslant \tau_2^{(m)} \geqslant \ldots \geqslant t_{k-1}^{(m)} \geqslant \tau_k^{(m)}.$$

Когда $m \longrightarrow \infty$, то некоторые из коэфициентов $p^{(m)}$ становятся сколь угодно большими. Так как $\bar{s}_2$ — конечная величина, то соответствующие этим коэфициентам параметры $\tau^{(m)}$ стремятся к нулю. $D_\infty(s_1, \ldots, s_n)$ является $(n-1)$-мерным образом и поэтому точка общего положения на ней должна представляться с помощью $n-1$ параметров.

Для таких точек только один коэфициент $p_\mu^{(m)}$ может стремиться к ∞ [33]), и соответствующее параметрическое представление имеет вид

(12,3) $$\bar{s}_1 = p_1\tau_1 + t_1 + p_2\tau_2 + \ldots + t_{\mu-1} + t_\mu + p_{\mu+1}\tau_{\mu+1} + \ldots + p_n\tau_n + \alpha,$$

(12,4) $$\bar{s}_i = p_1\tau_1^i + t_1^i + p_2\tau_2^i + \ldots + t_{\mu-1}^i + t_\mu^i + \ldots + p_k\tau_k^i \quad (i = 2, 3, \ldots, n),$$

где условия (12,2) пе́реходят в условия

$$\tau_1 \geqslant t_1 \geqslant \tau_2 \geqslant \ldots \geqslant t_{\mu-1} \geqslant 0 \geqslant t_\mu \geqslant \ldots \geqslant \tau_k,$$

а α — некоторый новый параметр, равный пределу $p_\mu^{(m)} \tau_\mu^{(m)}$.

---

[32]) Определенное таким образом многообразие R_m совпадает с $\mathfrak{R}_m - D_{m-1}$. Индекс m предполагается не меньшим, чем $n+1$. Для $m = n$ имеем $R_n = A_n$. R_m состоит из тех и только тех точек, для которых наименьшее число параметров, с помощью которых их координаты представляются в виде степенных сумм, равно m.

[33]) Заметим, что для точки $(\bar{s}_3, \ldots, \bar{s}_n)$ представление (12,4) является каноническим. Так как по теореме 11 точка $(\bar{s}_3, \ldots, \bar{s}_n)$ однозначно определяет свое каноническое представление, то индекс при коэфициенте $p_\mu^{(m)}$, стремящемся к ∞ вместе с m, должен быть одним и тем же для всякой последовательности точек $(s_1^{(m)}, \ldots, s_n^{(m)})$, стремящейся к точке $(\bar{s}_1, \ldots, \bar{s}_n)$.

Точки поверхности D_∞, не допускающие представления (12,3), (12,4), образуют многообразие, измерение которого меньше $n-1$. Всякая точка этого многообразия служит предельной точкой для такой последовательности $(s_1^{(m)}, \ldots, s_n^{(m)})$, у которой несколько коэфициентов $p^{(m)}$ стремятся к бесконечности. Пусть μ — наименьший, а $\mu+\rho$ — наибольший среди индексов коэфициентов $p^{(m)}$, стремящихся к ∞. Так как сумма $p_\mu^{(m)}\tau_\mu^{(m)2}+\ldots+p_{\mu+\rho}^{(m)}\tau_{\mu+\rho}^{(m)2}$ стремится к некоторому конечному пределу β^2 [34]), то $p_\mu^{(m)}\tau_\mu^{(m)i}+\ldots+p_{\mu+\rho}^{(m)}\tau_{\mu+\rho}^{(m)i}$ при $i>2$ стремится к нулю. Если через α обозначить предел суммы

$$p_\mu^{(m)}\tau_\mu^{(m)}+\ldots+p_{\mu+\rho}^{(m)}\tau_{\mu+\rho}^{(m)},$$

то точка $(\bar{s}_1, \ldots, \bar{s}_n)$ допускает представление

(12,5) $$\bar{s}_1=p_1\tau_1+\ldots+t_{\mu-1}+t_{\mu+\rho}+\ldots+p_k\tau_k+\alpha,$$

(12,6) $$\bar{s}_2=p_1\tau_1^2+\ldots+t_{\mu-1}^2+t_{\mu+\rho}^2+\ldots+p_k\tau_k^2+\beta^2,$$

(12,7) $$\bar{s}_i=p_1\tau_1^i+\ldots+t_{\mu-1}^i+t_{\mu+\rho}^i+\ldots+p_k\tau_k^i \quad (i=3, 4, \ldots, 2k),$$

где

$$\tau_1\geqslant t_1\geqslant\tau_2\geqslant\ldots\geqslant t_{\mu-1}\geqslant 0\geqslant t_{\mu+\rho}\geqslant\ldots\geqslant\tau_k.$$

Точки $D_\infty(s_1, \ldots, s_n)$ частью принадлежат телу $A_\infty(s_1, \ldots, s_n)$, частью не принадлежат. Определим часть D_∞, принадлежащую A_∞. Так как при $\rho=0$, $\beta=0$ формулы (12,5)—(12,7) переходят в формулы (12,3), (12,4), то мы будем пользоваться формулами (12,5)—(12,7). $2k-2\rho-2$ последних соотношений (12,7) дают каноническое представление точки $(\bar{s}_{2\rho+3}, \ldots, \bar{s}_{2k})$. По теореме 12 наименьшее значение функции $\sum u^{2\rho+2}$ при связях $\sum u^i=\bar{s}_i$ $(i=2\rho+3, \ldots, 2k)$ равно $\bar{s}_{2\rho+2}$ из (12,7), и это значение достигается только для канонического представления точки $(\bar{s}_{2\rho+3}, \ldots, \bar{s}_n)$. Отсюда следует, что телу $A_\infty(s_1, \ldots, s_{2k})$ принадлежат те и только те точки D_∞, для которых α и β из (12,5), (12,6) равны нулю [35]). Отсюда следует, что измерение многообразия таких точек равно $n-2$, т. е. точка общего положения на D_∞ не принадлежит A_∞.

Точно так же проводится исследование для верха $D_\infty(s_1, \ldots, s_{2k})$ и для $D_\infty(s_1, \ldots, s_{2k+1})$.

Во всех случаях $D_\infty(s_1, \ldots, s_n)$ $(n>3)$ является кусочно аналитической цилиндрической поверхностью. Ее параметрические уравнения получаются из параметрических уравнений для $D_m(s_1, \ldots, s_n)$, если s_1 считать произвольным, а в выражениях для s_i $(i=2, \ldots, n)$ какой-нибудь параметр τ_μ или группу соседних параметров $\tau_\mu, \ldots, \tau_{\mu+\rho}$ положить рав-

---

[34]) Для точки $(\bar{s}_3, \ldots, \bar{s}_{2k})$ представление (12,7) является каноническим. То, что по теореме 12 точка однозначно определяет соответствующее ей каноническое представление, доказывает, что числа μ, ρ, α, β зависят только от точки $(\bar{s}_1, \ldots, \bar{s}_{2k})$ и не зависят от выбора последовательности точек $(s_1^{(n)}, \ldots, s_{2k}^{(m)})$, сходящейся к этой точке.

[35]) Напоминаю, что при $\rho=0$ β тоже равно нулю.

ными нулю. Если исчезает группа членов $\tau_\mu, \ldots, \tau_{\mu+\rho}$, то в выражении для s_2 к сумме квадратов параметров нужно прибавить еще произвольный положительный параметр β^2. Измерение многообразия точек, для которых исчезает группа параметров, равно $n-2$.

Эти уравнения дают для точек $(s_3, \ldots, s_n)$ каноническое представление, и поэтому только те точки $D_\infty(s_1, \ldots, s_n)$ принадлежат $A_\infty(s_1, \ldots, s_n)$, для которых s_1 и s_2 точно равны соответственно сумме первых и сумме вторых степеней параметров, дающих это каноническое представление.

Другими словами: точка поверхности D_∞ тогда и только тогда принадлежит телу A_∞, когда она является общей для всех $D_m(s_1, \ldots, s_n)$ при $m \geqslant m_0$ [36]). Величина m_0 зависит от точки.

Очевидно, что такие точки составляют многообразие $n-2$ измерений.

Пусть $(s_1, \ldots, s_n)$ — произвольная точка тела A_∞. Если эта точка не лежит на какой-нибудь квазидискриминантной поверхности, т. е., другими словами, является внутренней точкой некоторого многообразия $R_m(s_1, \ldots, s_n)$, то существует континуум полиномов степени m, осуществляющих R-продолжаемость для точки $(s_1, \ldots, s_n)$ [37]). В частности, среди них будут и полиномы со всеми простыми корнями. Если же точка $(s_1, \ldots, s_n)$ является граничной для R_m и принадлежит, следовательно, D_m, то существует только один полином степени m, реализующий R-продолжаемость для этой точки. Это следует из доказанных в предыдущих параграфах экстремальных свойств квазидискриминантных поверхностей, а именно из того, что точка с координатами

$$s_i = \sum_{l=1}^{m} u_l^i \quad (i = 1, \ldots, n),$$

где число параметров u не превосходит m, только тогда принадлежит D_m, когда правые части представляют параметрические уравнения D_m.

Каждая точка тела A_∞ принадлежит некоторому R_m и однозначно определяет соответствующее ей каноническое представление. Полином, соответствующий этому каноническому представлению (т. е. такой, для которого величины, обратные параметрам t, τ, служат корнями кратности, равной коэфициенту при соответственном параметре), обозначим через $P_m(s_1, \ldots, s_n)$.

Из сказанного в сносках [33]) и [34]) следует, что когда точка $(s_1^{(m)}, \ldots, s_n^{(m)})$ стремится к некоторой точке $(\bar{s}_1, \ldots, \bar{s}_n)$ границы D_∞, то полиномы $P_m(s_1^{(m)}, \ldots, s_n^{(m)})$ равномерно стремятся к пределу, равному

$$e^{-\alpha z - \frac{\beta^2}{2} z^2} P(\bar{s}_3, \ldots, \bar{s}_n),$$

где $P(\bar{s}_3, \ldots, \bar{s}_n)$ — полином, соответствующий каноническому представлению точки $(\bar{s}_3, \ldots, \bar{s}_n)$.

Телу A_∞ принадлежат только те точки D_∞, для которых $\alpha = \beta = 0$. Измерение многообразия точек D_∞, для которых β отлично от нуля, равно $n-2$.

---

[36]) Разные поверхности D_m могут иметь общие ребра.

[37]) Полиномов степени меньше m, осуществляющих R-продолжаемость, для этой точки вообще не существует; m предполагается бо́льшим, чем n.

Это замечание в известной степени примыкает к теореме Лагерра [38]), утверждающей, что пределом равномерно сходящейся в сколь угодно малом круге $|z|<\rho$ последовательности полиномов, все корни которых вещественны, может служить только целая функция типа 1*, и что, обратно, всякая функция типа 1* служит пределом для некоторой равномерно сходящейся последовательности полиномов, все корни которых вещественны.

Целой функцией типа 1* называется целая трансцендентная функция вида

$$e^{-\gamma z^2+\alpha z}z^r\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{a_n}\right)e^{\frac{z}{a_n}},$$

где $\gamma\geqslant 0$, а α и все a_n вещественны.

§ 13. Алгоритм решения. Все определения, введенные в предыдущем параграфе, очевидным образом изменяются, если вместо пространства $(s_1, \ldots, s_n)$ оперировать с пространством $(s_{2\nu+1}, \ldots, s_n)$.

Цель настоящего параграфа состоит в нахождении алгоритма, дающего возможность узнать, принадлежит ли или не принадлежит заданная точка $(s_1^{(0)}, \ldots, s_n^{(0)})$ телу $A_\infty(s_1, \ldots, s_n)$. Если точка принадлежит телу, то алгоритм даст также возможность найти соответствующее ей каноническое представление и, следовательно, даст номер многообразия $R(s_1, \ldots, s_n)$, которому принадлежит заданная точка.

Этот алгоритм устанавливается с помощью индукции. Допустим, что нам известен такой алгоритм для пространства $(s_{2\nu+1}, \ldots, s_n)$, и покажем, как его дополнить, чтобы он был годен для пространства $(s_{2\nu-1}, \ldots, s_n)$.

Если с помощью известного нам для пространства $(s_{2\nu+1}, \ldots, s_n)$ алгоритма мы нашли, что точка $(s_{2\nu-1}^{(0)}, \ldots, s_n^{(0)})$ не принадлежит телу $A_\infty(s_{2\nu+1}, \ldots, s_n)$, то точка $(s_{2\nu-1}^{(0)}, \ldots, s_n^{(0)})$ не может принадлежать телу $A_\infty(s_{2\nu-1}, \ldots, s_n)$, и вопрос решен.

Пусть точка $(s_{2\nu+1}^{(0)}, \ldots, s_n^{(0)})$ принадлежит телу $A_\infty(s_{2\nu+1}, \ldots, s_n)$. Определим ее каноническое представление

$$s_i^{(0)}=\sum t^{(0)\,i}+\sum p^{(0)}\tau^{(0)\,i}\quad(i=2\nu+1, \ldots, n). \tag{13,1}$$

Если $(s_{2\nu+1}^{(0)}, \ldots, s_n^{(0)})$ является внутренней точкой $A_\infty(s_{2\nu+1}, \ldots, s_n)$, то в силу теорем 1, 2 и 12 точка $(s_{2\nu-1}^{(0)}, \ldots, s_n^{(0)})$ тогда и только тогда принадлежит телу $A_\infty(s_{2\nu-1}, \ldots, s_n)$, когда

$$s_{2\nu}^{(0)}\geqslant\sum t^{(0)\,2\nu-1}+\sum p^{(0)}\tau^{(0)\,2\nu-1}, \tag{13,2}$$

причем в случае, когда имеет место равенство, нужно потребовать еще выполнения равенства

$$s_{2\nu-1}^{(0)}=\sum t^{(0)\,2\nu-1}+\sum p^{(0)}\tau^{(0)\,2\nu-1}. \tag{13,3}$$

Если в (13,2) имеет место знак равенства и (13,3) выполняется, то точка $(s_{2\nu-1}^{(0)}, \ldots, s_n^{(0)})$ принадлежит многообразию $R_{m_0}(s_{2\nu-1}, \ldots, s_n)$,

[38]) См., например, G. Pólya, Über Annäherung durch Polynome mit lauter reellen Wurzeln, Rend. del Circ. mat. di Palermo, т. 36 (1913), стр. 279—295.

или, более точно, всем $D_m(s_{2\nu-1}, \ldots, s_n)$, $m \geqslant m_0$, где m_0 равно сумме коэфициентов при $t^{(0)}$, $\tau^{(0)}$ в (13,1), равно номеру того многообразия $R_{m_0}(s_{2\nu+1}, \ldots, s_n)$, которому принадлежит точка $(s_{2\nu+1}, \ldots, s_n)$.

Если точка тела $A_\infty(s_{2\nu+1}, \ldots, s_n)$ принадлежит его границе, то, как было показано в § 12, эта точка принадлежит $A_\infty(s_{2\nu-1}, \ldots, s_n)$ тогда и только тогда, когда в (13,2), (13,3) имеет место равенство. Для таких точек вопрос, следовательно, вполне решен, и остается рассмотреть точки $(s^{(0)}_{2\nu+1}, \ldots, s^{(0)}_n)$, внутренние для $A_\infty(s_{2\nu+1}, \ldots, s_n)$. Таким образом точка не может быть общей для разных $D(s_{2\nu+1}, \ldots, s_n)$ и поэтому, если $(s^{(0)}_{2\nu+1}, \ldots, s^{(0)}_n)$ принадлежит $R_{m_0}(s_{2\nu+1}, \ldots, s_n)$, то расстояние ρ этой точки от $D_{m+1}(s_{2\nu+1}, \ldots, s_n)$ отлично от нуля.

Так как D_{m+1} является кусочно алгебраической поверхностью, параметрические уравнения которой нам известны, то определение расстояния ρ сводится к решению некоторой системы уравнений, которые легко составить.

Точка $(s'_{2\nu+1}, \ldots, s'_n)$ сферы

$$\sum_{i=2\nu+1}^{n} (s^{(0)}_i - s'_i)^2 < \rho^2 \tag{13,4}$$

лежит внутри D_{m+1} и, следовательно, принадлежит $A_{m+1}(s_{2\nu+1}, \ldots, s_n)$.

Легко найдем, что наименьшее значение функции $\sum_{\mu=1}^{m+1} u_\mu^{2\nu}$ при связи $\sum_{\mu=1}^{m+1} u_{\mu+1}^{2\nu+1} = s'_{2\nu+1}$ равно $(s'_{2\nu+1})^{2\nu/(2\nu+1)}$. Следовательно, когда (s'_i) удовлетворяют неравенству (13,4), то наименьшее возможное значение для таких $s'_{2\nu}$, что точка $(s'_{2\nu}, \ldots, s'_n)$ принадлежит $A_{m+1}(s_{2\nu}, \ldots, s_n)$, не меньше $\sigma_{2\nu}$, где $\sigma_{2\nu} = (s^{(0)}_{2\nu+1} \pm \rho)^{2\nu/(2\nu+1)}$ (берется знак, противоположный знаку $s^{(0)}_{2\nu+1}$). Обозначим через $r^{2\nu}$ положительную в силу соотношения (13,2) величину

$$r^{2\nu} = s^{(0)}_{2\nu} - \sigma_{2\nu} + \varepsilon, \quad \varepsilon > 0. \tag{13,5}$$

Выберем натуральное число q_1 (q_1 здесь играет роль числа m из теоремы 2) столь большим, чтобы

$$q_1^2 \sum_{i=2\nu+1}^{n} \left(\frac{r}{q_1^{\frac{1}{2}\nu}}\right)^{2i} \leqslant \rho^2. \tag{13,6}$$

Так как при $0 \leqslant \beta \leqslant r$ точка $\left(s^{(0)}_i - q_1\left(\frac{\beta}{q_1^{\frac{1}{2}\nu}}\right)^i\right)$ в силу (13,6) принадлежит $A_{m+1}(s_{2\nu+1}, \ldots, s_n)$, то система

$$s^{(0)}_i = u^i_1 + \ldots + u^i_{m+1} + q_1\left(\frac{\beta}{q_1^{\frac{1}{2}\nu}}\right)^i \quad (i = 2\nu+1, \ldots, n)$$

при $0 \leqslant \beta \leqslant r$ имеет решение. Величины u мы можем рассматривать как непрерывные функции от β, которые при $\beta = 0$ становятся равными параметрам $t^{(0)}$, $\tau^{(0)}$ (а одно u становится равным нулю) из (13,1).

Когда β меняется от 0 до r, функция

$$u_1^{2\nu} + \ldots + u_m^{2\nu} + \beta^{2\nu}$$

меняется от

$$\sum t^{(0)2\nu} + \sum p^{(0)} \tau^{(0)2\nu} < s_{2\nu}^{(0)}$$

до некоторого

$$u'^{2\nu} + \ldots + u'^{2\nu}_{m+1} + r^{2\nu} \geqslant \sigma_{2\nu} + r^{2\nu} > s_{2\nu}^{(0)}.$$

Следовательно, при каком-то β, $0 < \beta < r$, будут иметь место равенства

$$s_j^{(0)} = u_1^j + \ldots + u_{m+1}^j + q_1 \left(\frac{\beta}{q_1^{\frac{1}{2\nu}}} \right)^{2\nu} \quad (j = 2\nu,\ 2\nu+1,\ \ldots,\ n)\ ^{39}).$$

Рассмотрим многообразие $A_{m+q_1+1}(s_{2\nu}, \ldots, s_n)$. Границы этого многообразия должны быть вида (см. § 11)

$$s_j = \sum_{\mu=1}^{n-2\nu} p_\mu u_\mu^j,$$

где $\sum p \leqslant m + q_1 + 1$. Так как для любой достаточно близкой к $(s_{2\nu}^{(0)}, \ldots, s_n^{(0)})$ точки (именно для этого и вводится в определение $r^{2\nu}$ положительная величина ε) можно провести подобное рассуждение, то координаты любой точки представимы в виде

$$s_j'' = u_1''^j + \ldots + v_{m+1}''^j + q_1 \left(\frac{\beta''}{q_1^{\frac{1}{2\nu}}} \right)^{2\nu}, \quad 0 < \beta'' < r,$$

и, следовательно, точка $(s_{2\nu}^{(0)}, \ldots, s_n^{(0)})$ является внутренней точкой многообразия $A_{m+q_1+1}(s_{2\nu}, \ldots, s_n)$.

Так как вид всех возможных границ многообразия $A_{m+q_1+1}(s_{2\nu}, \ldots, s_n)$ известен, то мы можем, решив некоторые системы уравнений, определить такое δ', что $0 < \delta' \leqslant \delta$, где δ — расстояние точки $(s_{2\nu}^{(0)}, \ldots, s_n^{(0)})$ до границы. Точка $(s'_{2\nu}, \ldots, s'_n)$ сферы

$$\sum_{i=2\nu}^{n} (s_i^{(0)} - s'_i)^2 \leqslant \delta'^2 \tag{13,7}$$

принадлежит $A_{m+q_1+1}(s_{2\nu}, \ldots, s_n)$.

Наименьшее и наибольшее значения функции $\sum_{\mu=1}^{m+q_1+1} u_\mu^{2\nu-1}$ при связи $\sum_{\mu=1}^{m+q_1+1} u_\mu^{2\nu} = s'_{2\nu}$ соответственно равны

$$\mp \left(\frac{s'_{2\nu}}{m+q_1+1} \right)^{(2\nu-1)/2\nu} (m+q_1+1).$$

---

39) По существу это — новое доказательство теоремы 2.

Следовательно, когда s' удовлетворяют неравенствам (13,7), наименьшее и наибольшее значения для таких $s'_{2\nu-1}$, что точка $(s'_{2\nu-1}, \ldots, s'_n)$ принадлежит $A_{m+q_1+1}(s_{2\nu-1}, \ldots, s_n)$, соответственно не меньше и не больше

$$\mp\sigma'_{2\nu-1} = \mp\left(\frac{s^{(0)}_{2\nu}+\delta'}{m+q_1+1}\right)^{(2\nu-1)/2\nu}(m+q_1+1).$$

Обозначим через $\gamma_1^{2\nu-1}$ и $\gamma_2^{2\nu-1}$ величины

$$\gamma_1^{2\nu-1} = \sigma'_{2\nu-1} + s^{(0)}_{2\nu-1}, \quad \gamma_2^{2\nu-1} = -\sigma_{2\nu-1} + s^{(0)}_{2\nu-1}.$$

Выберем теперь такое натуральное число q_2, что

$$(13,8) \qquad q_2^2 \sum_{i=2\nu}^{n}\left(\frac{\gamma}{q_2^{1/(2\nu-1)}}\right)^{2i} \leqslant \delta'^2, \quad \text{где } \gamma = \max(|\gamma_1|, |\gamma_2|).$$

Точно так же, как и выше, найдем, что при некотором α, $\gamma_2 \leqslant \alpha \leqslant \gamma_1$ или $\gamma_2 \geqslant \alpha \geqslant \gamma_1$ будем иметь

$$s^{(0)}_2 = u^i_1 + \ldots + u^i_{m+q_1+1} + q_2\left(\frac{\alpha}{q_2^{1/(2\nu-1)}}\right)^i \quad (i = 2\nu-1, \ldots, n),$$

и следовательно, точка $(s^{(0)}_{2\nu-1}, \ldots, s^{(0)}_n)$ принадлежит некоторому $R_{m'}(s_{2\nu-1}, \ldots, s_n)$, где $m' \leqslant m+q_1+q_2+1$.

По теореме 11 точка $(s^{(0)}_{2\nu-1}, \ldots, s^{(0)}_n)$ однозначно определяет соответствующее ей каноническое представление. Так как $m' \leqslant m+q_1+q_2+1$, то нам известна некоторая верхняя граница для коэфициентов в каноническом представлении, и в силу однозначной определенности этого представления мы сможем при помощи конечного числа испытаний определить его.

Итак, предполагая, что нам известен алгоритм для пространства $(s_{2\nu+1}, \ldots, s_n)$, мы дополним его до алгоритма для пространства $(s_{2\nu-1}, \ldots, s_n)$.

Если теперь n — четное число, $n = 2k$, и нам известен алгоритм для пространства (s_{2k-1}, s_{2k}), то, проделав $k-1$ раз переход от пространства $(s_{2\nu+1}, \ldots, s_{2k})$ к пространству $(s_{2\nu-1}, \ldots, s_{2k})$, мы придем к алгоритму для пространства $(s_1, \ldots, s_{2k})$.

Если n — нечетное, $n = 2k+1$, то, отправляясь от пространства (s_{2k+1}), мы придем к алгоритму в пространстве $(s_1, \ldots, s_{2k+1})$.

Следовательно, для полного решения вопроса достаточно разобрать эти два случая.

1. Пространство (s_{2k-1}, s_{2k}).

Как было показано в § 1, необходимое и достаточное условие того, чтобы точка $(s^{(0)}_{2k-1}, s^{(0)}_{2k})$ принадлежала $A_\infty(s_{2k-1}, s_{2k})$, дается неравенством $s^{(0)}_{2k} > 0$.

Роль $D_m(s_{2k-1}, s_{2k})$ играют кривые

$$s_{2k-1} = m\tau^{2k-1}, \quad s_{2k} = m\tau^{2k},$$

а всякая точка многообразия $R_m(s_{2k-1}, s_{2k})$ имеет вид

$$s_{2k-1} = (m-1)\tau^{2k-1} + t^{2k-1}, \quad s_{2k} = (m-1)\tau^{2k} + t^{2k}, \quad 0 \leqslant \frac{t}{\tau} \leqslant 1.$$

Отсюда следует, что $m = \left[\frac{s_{2k-1}^{2k}}{s_{2k}^{2k-1}}\right] + 1$.

Для того чтобы найти каноническое представление точки $(s_{2k-1}^{(0)}, s_{2k}^{(0)})$, нужно решить систему

$$s_i^{(0)} = p\tau^{(0)i} + t^{(0)i} \quad (i = 2k-1,\ 2k),$$

где $p = \left[\frac{s_{2k-1}^{(0)\,2k}}{s_{2k}^{(0)\,2k-1}}\right]$[40]) и $0 \leqslant \frac{t}{\tau} < 1$.

2. Пространство (s_{2k+1}).

Каноническим представлением в этом пространстве назовем представление $s_{2k+1}^{(0)} = t^{(0)\,2k+1}$. Многообразие $A_2(s_{2k},\ s_{2k+1}) = A_\infty(s_{2k},\ s_{2k-1})$ и ограничено кривою $s_{2k} = t^{2k}$, $s_{2k+1} = t^{2k+1}$. Если выполняется необходимое условие $s_{2k}^{(0)} > t^{(0)2k}$, то точки $(s_{2k}^{(0)},\ s_{2k+1}^{(0)})$ лежат внутри A_2. Определяем расстояние от этой точки до границы и действуем, как было указано выше.

Итак, все три задачи, поставленные во введении, решены.

---

[40]) Если целая часть от $\frac{s_{2k-1}^{2k}}{s_{2k}^{2k-1}}$ равна нулю, то p полагается равным 1.

SUR QUELQUES PROPRIÉTÉS DES COUPLES DE FONCTIONS UNIFORMISANTES.

Par Paul Montel (Paris).

1. On doit à M. Picard des théorèmes remarquables concernant les couples de fonctions méromorphes uniformisant une courbe plane algébrique dont le genre est supérieur à l'unité [1]). Ces propositions sont analogues à celles qui sont relatives aux fonctions à valeurs exceptionnelles, mais n'introduisent pas de telles valeurs. Au contraire, ces valeurs exceptionnelles s'introduisent dans le cas de courbes algébriques de genre *un* ou zéro [2]). Je me propose d'indiquer ici quelques résultats permettant de poursuivre cette analogie.

2. Soient

$$x = a_0 + a_1 z + \ldots = f(z),$$
$$y = b_0 + b_1 z + \ldots = g(z)$$

deux fonctions méromorphes de la variable complexe z dans le cercle $|z| < R$ liées par la relation algébrique

$$F(x, y) = 0;$$

on dit que ces fonctions uniformisent la relation ou la courbe algébrique autour du point (a_0, b_0) de cette courbe, ou encore, qu'elles forment un couple de fonctions uniformisant cette relation. Établissons d'abord une proposition fondamentale relative au système complexe formé d'un couple de fonctions uniformisant une courbe algébrique de genre supérieur à l'unité:

La famille complexe formée des couples de fonctions $f(z)$, $g(z)$ *uniformisant, pour* $|z| < R$, *une même courbe algébrique de genre supérieur à l'unité est normale lorsqu'on fixe la valeur* $f(0) = a_0$.

L'équation

$$F(a_0, y) = 0$$

---

[1]) É. Picard, Sur une proposition concernant les fonctions uniformes d'une variable liées par une relation algébrique, Bulletin des Sciences Mathématiques et Astronomiques, 2e série, t. VII (1883), 1-ère partie, pp. 107—116. — Démonstration d'un théorème général sur les fonctions uniformes liées par une relation algébrique, Acta Mathematica, t. 11 (1887), pp. 1—12. — Sur les couples de fonctions uniformes d'une variable correspondant aux points d'une courbe algébrique de genre supérieure à l'unité, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, t. XXXIII (1912), pp. 254—258.

[2]) Paul Montel, Sur les familles complexes et leurs applications, Acta Mathematica, t. 49 (1926), pp. 115—161.

fait correspondre à la valeur a_0 un nombre fini de valeurs de y. Il suffit de montrer que la famille des couples (f, g) correspondant à une même valeur b_0 de g est normale. En réunissant les familles normales correspondant à chaque valeur b_0, on obtiendra une famille normale formée de tous les couples uniformisants pour lesquels $f(0) = a_0$.

Soit donc une famille complexe de couples de fonctions uniformes (f, g) uniformisant une courbe algébrique de genre p supérieur à *un* et pour lesquelles $f(0) = a_0$, $g(0) = b_0$. On sait qu'il existe une fonction $u(x, y)$ holomorphe en tout point de la surface de Riemann correspondant à la courbe et dont le module est inférieur à l'unité. La fonction

$$u(z) = u[f(z), g(z)]$$

est holomorphe en tout point du cercle $|z| < R$ et vérifie l'inégalité

$$|u(z)| < 1.$$

On a d'ailleurs

$$u(0) = u(a_0, b_0).$$

La famille des fonctions $u(z)$ correspondant à la famille complexe (f, g) est donc normale dans le cercle.

D'autre part, les coordonnées x, y des points de la courbe s'expriment au moyen de fonctions méromorphes de la variable u dans le cercle $|u| < 1$; ce sont des fonctions automorphes de cette variable: $x(u)$, $y(u)$. Toute suite infinie de couples (f, g) donne naissance à une suite infinie $u_n(z)$ convergeant uniformément pour $|z| < 1$ vers $u_0(z)$ et l'on a

$$f_n(z) = x[u_n(z)], \quad g_n(z) = y[u_n(z)],$$

on en déduit que, autour de chaque point z, la suite des couples (f_n, g_n) converge uniformément vers le couple (f_0, g_0), avec

$$f_0(z) = x[u_0(z)], \quad g_0(z) = y[u_0(z)],$$

la convergence autour d'un pôle étant définie, comme d'habitude, sur la surface de Riemann, image du plan complexe.

Si le genre p de la courbe est égal à l'unité, on peut exprimer les coordonnées de ses points à l'aide de fonctions elliptiques $x(u)$, $y(u)$ d'un paramètre u qui parcourt un parallélogramme des périodes. Si le couple (f, g) ne prend pas le couple de valeurs (a, b) correspondant à u_0, la fonction $u(z)$ définie précédemment admet comme valeurs exceptionnelles tous les points congruents à u_0: la famille $u(z)$ est alors normale; on en déduit, comme plus haut, que la famille complexe (f, g) est normale.

Si le genre est nul, $x(u)$, $y(u)$ sont des fonctions rationnelles de u lorsque le point (f, g) ne passe pas par trois points de la surface de Riemann correspondante (a, b), (a', b'), (a'', b''), la famille complexe (f, g) est encore normale.

3. Supposons $p > 1$; dans ce cas, $f(z)$ est holomorphe dans le cercle $|z| < \theta R$ $(0 < \theta \leqslant 1)$, θ désignant un nombre indépendant de R. En effet, les fonctions $f_1(z') = f(Rz')$ permettent d'uniformiser la courbe pour $|z'| < 1$: elles forment une famille normale et, comme $f_1(0) = a_0$ est fini,

ces fonctions sont holomorphes dans un cercle $|z'|<\theta\leqq 1$; donc $f(z)$ est holomorphe pour $|z|<\theta R$ [3]).

Les fonctions $f(z)$ sont holomorphes et forment une famille normale dans le cercle $|z|<\theta R$: comme elles prennent à l'origine la valeur a_0, elles sont bornées par un nombre fixe dans tout cercle concentrique au précédent et de rayon moindre. Donc, les fonctions $f(z)$ uniformisant une relation algébrique de genre supérieur à l'unité admettent un théorème du type de celui de M. Schottky.

Soit a_n le premier coefficient de $f(z)$ d'indice positif qui est différent de zéro. Dans le cercle $|z|<\frac{\theta}{2}R$, les fonctions $f(z)$ ont un module ne dépassant pas un nombre fixe Ω; on en déduit

$$\left|a_n\left(\frac{\theta R}{2}\right)^n\right|<\Omega,$$

d'où

$$R<\frac{2}{\theta}\sqrt[n]{\frac{\Omega}{|a_n|}};$$

on a donc un théorème du type de celui de M. Landau, comme l'a montré M. Picard lorsque $n=1$.

On en déduit aussitôt que le rayon R n'est jamais infini: deux fonctions méromorphes dans le plan ne peuvent être liées par une relation algébrique de genre supérieur à l'unité. C'est le théorème de M. Picard.

Plus généralement, on peut démontrer la proposition suivante:

Si la famille de couples (f, g) uniformisant une relation algébrique de genre supérieur à l'unité n'admet aucun couple limite se réduisant à un point, le rayon R admet une limite supérieure finie.

En effet, dans le cas contraire, il existerait un couple uniformisant (f_n, g_n) pour lequel R surpasserait l'entier n. Comme la famille (f_n, g_n) est normale dans tout cercle fini, on en déduirait une suite convergeant uniformément dans tout domaine fini vers un couple uniformisant (f_0, g_0) formé de deux fonctions méromorphes dans le plan, ce qui est impossible à moins que les coefficients de leurs développements de Taylor ne soient nuls sauf le premier. Cette hypothèse est à rejeter, car la suite convergerait vers un point unique (a_0, b_0). Donc, l'hypothèse initiale est à rejeter aussi et le théorème est établi.

Pour $p=1$, on obtient les mêmes résultats si le couple admet un point exceptionnel. Par exemple, on peut supposer $f(z)$ holomorphe. Pour $p=0$, on introduira trois points exceptionnels; par exemple, on peut supposer $f(z)$ holomorphe lorsque la courbe a trois points distincts pour x infini.

Pour obtenir des familles de couples de fonctions uniformisantes dont aucune limite ne se réduit à un point, on pourra supposer

$$f(0)=a_0,\quad f(\alpha)=a_0'\quad (a_0'\neq a_0),$$

---

[3]) Cf. Paul Montel, Sur les familles normales de fonctions analytiques, Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure, sér. 3, t. 33 (1916), pp. 223—302.

a, a_0, a'_0 étant des nombres fixes; ou

$$f(0)=a_0, \quad f'(\alpha)=a'_1\neq 0 \quad \text{ou} \quad f^{(n)}(\alpha)=a'_n\neq 0,$$

α, a_0, a'_1, a'_n étant fixes; si $\alpha=0$, on retombe sur le théorème de M. Picard.

4. Nous dirons que le couple (f, g) est univalent pour $|z|<R$, si chaque point (a, b) n'est recouvert qu'une fois pour de telles valeurs de z. En particulier, le couple sera univalent si l'une des deux fonctions f ou g est univalente; mais cette condition n'est pas nécessaire.

Une famille de fonctions univalentes pour $|z|<R$ est quasi normale d'ordre un. Il n'en est plus de même pour une famille complexe formée de couples univalents: il suffit, pour s'en assurer, de prendre pour les $f(z)$ des fonctions univalentes et de leur associer des fonctions $g(z)$ arbitraires.

Considérons une famille de couples (f, g) de fonctions uniformisantes pour une courbe de genre supérieur à l'unité et supposons $R=1$. *Si* a_0 *et* $a_1\neq 0$ *sont donnés, il existe un noyau d'univalence pour le couple:* en d'autres termes, il existe un nombre θ_0, inférieur ou égal à *un* et tel que dans le cercle $|z|<\theta_0$, le point (f, g) ne couvre jamais deux fois un point de la surface de Riemann. En effet, la famille des fonctions méromorphes $f(z)$ est normale pour $|z|<1$; comme a_1 est fixe et non nul, elle admet un noyau d'univalence pour $f(z)$; donc le couple (f, g) admet un noyau d'univalence, dont le rayon θ_0 n'est pas inférieur à celui du noyau précédent.

On définirait de même l'ordre de multivalence d'un couple (f, g) pour z intérieur à un domaine (D): c'est le nombre maximum de fois que le point (f, g) peut recouvrir un point (a, b) correspondant à une valeur de z intérieure au domaine (D).

Considérons une famille complexe formée de couples de fonctions (f, g) uniformisant une même relation algébrique de genre supérieur à *un* lorsque z appartient à un domaine connexe (D). Supposons que cette famille n'admette aucun couple limite réduit à un point unique. Dans ces conditions: *Dans tout domaine* (D') *intérieur à* (D), *les couples* (f, g) *ont un ordre de multivalence borné.*

Il suffit de montrer qu'il en est ainsi autour de chaque point z_0 intérieur à (D), c'est-à-dire dans un cercle assez petit ayant ce point pour centre: car on pourra couvrir (D') à l'aide d'un nombre fini de ces cercles, d'après le théorème de Borel-Lebesgue.

Prenons par exemple $z_0=0$. S'il n'y avait pas un ordre fini de multivalence autour de ce point, on pourrait, quel que soit l'entier n, trouver un couple (f_n, g_n) de la famille passant au moins n fois en un même point $(a^{(n)}, b^{(n)})$ de la courbe pour des valeurs de z dont le module est inférieur à $\frac{1}{n}$. Extrayons de la suite (f_n, g_n) une suite partielle (f_{n_k}, g_{n_k}) convergeant uniformément vers (f_0, g_0) pour k infini. Par hypothèse, l'une des fonctions f_0, g_0 n'est pas constante: soit f_0. Alors $f_0(z)$ admet à l'origine un cercle de multivalence, d'ordre μ par exemple. On peut supposer que la suite $a^{(n_k)}$ converge vers un point unique a en modifiant convenablement les indices n_k. Alors, si (γ) désigne une circonférence assez

petite de centre origine, on a

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{(\gamma)}\frac{f_0'(z)\,dz}{f_0(z)-a}=\mu_1\leqslant\mu$$

et il en est de même pour l'intégrale

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{(\gamma)}\frac{f_{n_k}'(z)\,dz}{f_{n_k}(z)-a_{n_k}},$$

qui a pour limite la première pour k infini. Or cela contredit l'hypothèse que f_{n_k} prend n_k fois la valeur a_{n_k} dans le cercle de rayon $\frac{1}{n_k}$. En particulier, supposons que la famille (f, g) admette à l'origine un vecteur (a_k, b_k) non nul. On pourra supposer, par exemple, que a_k est fixe et différent de zéro ou que $|a_k|$ reste supérieur à un nombre positif: a_0 est toujours considéré comme fixe. Dans ces hypothèses, aucune limite n'est constante, pour une suite complexe (f, g). Si le domaine (D) est le cercle $|z|<R$, il y a un ordre de multivalence pour tout cercle $|z|\leqslant R'<R$. On peut montrer en outre qu'il existe, autour de l'origine, des noyaux de multivalence d'ordres k, $k+1,\ldots$ Il suffit de raisonner comme on l'a fait pour établir l'existence d'un noyau d'univalence lorsque a_1 est fixe et non nul.

Voici une application des remarques qui précèdent: en remplaçant x par $\frac{x-a_0}{a_1}$ si a_1 est différent de zéro, et z par Rz on peut écrire les fonctions uniformisantes

$$x=z+a_2z^2+\ldots+a_nz^n+\ldots,$$
$$y=b_0+b_1z+\ldots$$

avec $|z|\leqslant 1$. Il existe un noyau $|z|\leqslant\theta_0$ dans lequel x est holomorphe et univalente: *on a donc les inégalités*

$$|a_2|\leqslant\frac{2}{\theta_0},\quad |a_3|\leqslant\frac{3}{\theta_0^2},\quad \ldots,\quad |a_n|\leqslant\frac{\varphi(n)}{\theta_0^{n-1}},\ldots,$$

$\varphi(n)$ étant probablement égal à n.

5. Soit (Σ) une surface de Riemann à m feuillets et (S) une surface de Riemann déduite de la première par l'adjonction de nouvelles lignes de passage: nous dirons que (Σ) est un noyau de (S) et que deux surfaces (S) déduites de la même surface (Σ) ont un noyau commun. À la surface de Riemann (S) correspond une classe de courbes algébriques; soit

$$F(x, y)=0$$

l'une d'elles. De même à la surface (Σ) correspond une classe de courbes algébriques dont l'équation

$$\Phi(x, \eta)=0$$

représente l'une. La fonction algébrique η est holomorphe en (x, y) en chaque point de (S) et tout couple uniformisant (S) uniformise aussi η. Il en résulte que la famille des fonctions $f(z)$ tirées de couples (f, g) uni-

formisant une des courbes (S) forme une famille normale dans les mêmes conditions que la famille des couples (f, γ) uniformisant (Σ). Donc:

Les fonctions

$$x = a_0 + a_1 z + \dots \quad (|z| \leqslant R),$$

uniformisant une des surfaces (S) admettant un même noyau de genre supérieur à l'unité, forment, quand a_0 est fixe, une famille normale.

On en déduit, pour les fonctions $f(z)$ servant à uniformiser des courbes algébriques de même noyau, des propositions semblables à celles que nous avons rappelées ou établies dans le cas d'une seule fonction algébrique.

Prenons en particulier $f(z) = z$, on voit que la fonction

$$y = b_0 + b_1 x + \dots + b_n x^n + \dots$$

ne peut admettre un cercle de méromorphie dépassant une certaine constante lorsque y représente une courbe algébrique (S) dont le noyau est de genre supérieur à l'unité.

О РОСТЕ ТРАНСЦЕНДЕНТНОЙ ФУНКЦИИ, ВЫРАЖАЕМОЙ В КОНЕЧНОМ ВИДЕ С ПОМОЩЬЮ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ТРАНСЦЕНДЕНТНЫХ.

Д. Д. Мордухай-Болтовской (Ростов-на-Дону).

§ 1. В своей работе „О некоторых приложениях аналитической теории диференциальных уравнений к интегрированию в конечном виде“ [1]) я указываю, каким образом можно заключать о невыражаемости решения y алгебраического диференциального уравнения

$$f(x, y, y') = 0 \tag{1}$$

в конечном виде, с одной стороны, получая особые точки y из непосредственного исследования методом Брио и Букэ, с другой стороны, определяя их из той формы, которая мной выведена для решения, выражаемого в конечном виде в квадратурах.

Но вместо типа особых точек, определяемого разложением около них, мы можем характеризовать решение y уравнения (1) *ростом* $|y|$ с возрастанием $|x|$ [2]).

В некоторых случаях, как мы ниже увидим, характер роста $|y|$ определяется методом Бутру и с помощью рассмотрения формы для y, определяемой особыми точками; последняя может оказаться другого характера роста, что приводит к заключению о невыражаемости в конечном виде.

В настоящей статье мы 1) исследуем рост функций, выражаемых в конечном виде, причем подробно занимаемся только функциями первого и второго классов, 2) указываем, в каких случаях мы должны отнести y в случае выражаемости в конечном виде к *показательному* типу. Результаты, получаемые для роста функции, выражаемой в конечном виде, дают нам *высшую границу* для коэфициентов голоморфного разложения

$$a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + \ldots,$$

---

[1]) Работа напечатана в журнале Украинской Академии наук за 1937 г. Основная идея изложена в заметке „Об одном приложении исследований Брио и Букэ к диференциальным уравнениям первого порядка“, Известия Варшавского Политехнического института за 1909 г.

[2]) О росте функций см. Borel, Leçons sur la théorie de la croissance, Paris 1910, а также Н. Парфентьев, Исследования по теории роста функций, Казань 1910.

ыражаемого в конечном виде, в то время как арифметические свойства, скрываемые мной для $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ в этом случае, дают только *изшую* границу.

§ 2. При исследовании роста функций *первого класса* мы будем ити постепенно от более простых элементарных построений к более ложным. При этом, как и в других моих работах, я несколько видоиз-еняю классификацию Лиувилля [3]), принимая за *основные трансцен-ентные построения* (предпочитая термин построение термину функция) не только

$$e^{\alpha(x)}, \quad \ln \alpha(x), \tag{2}$$

где $\alpha(x)$ — трансцендентное построение низшего класса, но еще и

$$[\alpha(x)]^{\lambda}, \tag{3}$$

где λ — *иррациональное* число, так что неосновное трансцендентное по-строение представляется в виде

$$\Phi\{e^{\alpha_1^{(q-1)}(x)}, e^{\alpha_2^{(q-1)}(x)}, \ldots; \ln \beta_1^{(q-1)}(x), \ln \beta_2^{(q-1)}(x), \ldots$$
$$\ldots; [\gamma_1^{(q-1)}(x)]^{\lambda_1}, [\gamma_2^{(q-1)}(x)]^{\lambda_2}, \ldots\},$$

где Φ — алгебраическая функция от основных трансцендентных q-го класса

$$e^{\alpha_i^{(q-1)}(x)}, \quad \ln \beta_i^{(q-1)}(x), \quad [\gamma_i^{(q-1)}(x)]^{\lambda_i}$$

и трансцендентных низших классов.

Сейчас мы будем говорить только о трансцендентных *первого* класса, так что будем предполагать $\alpha(x)$ алгебраической функцией. При этом мы в первую очередь ограничимся *рациональными показательными построениями*

$$\Theta(x) = \frac{\sum_j \varphi_j(x) e^{\alpha_j(x)}}{\sum_j \psi_j(x) e^{\beta_j(x)}}, \tag{4}$$

где φ_j, ψ_j, α_j, β_j — рациональные функции, из которых первые две, ко-нечно, можно предполагать *целыми*.

Рост рациональных дробей легко определяется. Для того чтобы $\alpha(x) = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ возрастало вместе с $|x|$, необходимо, чтобы $\alpha(x)$ имело своим полюсом $x = \infty$, т. е. чтобы степень $\varphi(x)$ была выше вообще на еди-ницу степени $\psi(x)$.

Мы можем вообще написать

$$\underline{g}|x|^{\mu} < \left|\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}\right| < \bar{g}|x|^{\mu}, \tag{5}$$

---

[3]) Liouville, Mémoire sur la classification des transcendantes etc., Journal de Liouville, т. II (1838), стр. 523, и другие его работы в Crelle's Journal, т. X (1833), Journal de l'École Polytechnique, т. XIV (1833). Д. Мордухай-Болтовской, Об интегрировании в конечном виде линейных диференциальных уравнений, Изв. Варш. унив., Варшава 1910. Об интегрировании трансцендентных функ-ций, там же, 1912.

где $\underline{g}$, $\bar{g}$ — некоторые постоянные числа и $\mu \gtreqless 0$. В самом деле,

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = x^{\mu} \frac{a_0 + \frac{a_1}{x} + \ldots + \frac{a_{n+\mu}}{x^{n+\mu}}}{b_0 + \frac{b_1}{x} + \ldots + \frac{b_n}{x^n}} = x^{\mu}(g + \varepsilon), \tag{6}$$

так что

$$\lim_{x \to \infty} \left| \frac{\varphi(x)}{x^{\mu} \psi(x)} \right| = g,$$

и можно взять

$$\underline{g} < g + \varepsilon < \bar{g}.$$

Переходим к основному показательному построению

$$\eta = e^{\varphi(x)/\psi(x)} = e^{x^{\mu}\vartheta(x)}.$$

Полагая

$$x = \rho(\cos\theta + i\sin\theta),$$

$$x^{\mu} = \rho^{\mu}(\cos\mu\theta + i\sin\mu\theta),$$

мы будем иметь

$$\vartheta(x) = P(\rho\cos\theta,\ \rho\sin\theta) + iQ(\rho\cos\theta,\ \rho\sin\theta),$$

где P и Q — такие рациональные функции, что

$$\lim_{\rho \to \infty} P = p, \quad \lim_{\rho \to \infty} Q = q, \tag{7}$$

p, q — конечные числа.

Далее,

$$\eta = e^{\rho^{\mu}[P\cos\mu\theta - Q\sin\mu\theta]}\,[\cos(\rho^{\mu}\sin\mu\theta) + i\sin(\rho^{\mu}\sin\mu\theta)]. \tag{8}$$

Замечая, что на основании условий (7)

$$P = p(1 + \varepsilon'), \quad Q = q(1 + \varepsilon''),$$

где ε', ε'' бесконечно малы при бесконечно больших $|x|$, получаем

$$|\eta| = e^{\rho^{\mu}[p(1+\varepsilon')\cos\mu\theta - q(1+\varepsilon'')\sin\mu\theta]}. \tag{9}$$

Это выражение приводит нас к заключению, что если

$$p(1 + \varepsilon')\cos\mu\theta - q(1 + \varepsilon'')\sin\mu\theta > 0 \quad \text{и} \quad \mu > 0,$$

то $|\eta|$ бесконечно растет вместе с $\rho = |x|$.

Но мы можем положить

$$(1 + \varepsilon')p = r(1 + \varepsilon)\cos(\varphi + \omega),$$

$$(1 + \varepsilon'')q = r(1 + \varepsilon)\sin(\varphi + \omega),$$

где ε, ω бесконечно малы. Тогда

$$p(1 + \varepsilon')\cos\mu\theta - q(1 + \varepsilon'')\sin\mu\theta = r(1 + \varepsilon)\cos(\mu\theta + \varphi + \omega).$$

Возьмем для x *прямолинейный путь*, идущий от точки $z = 0$

в угле, определяемом неравенствами

$$\frac{4k-1}{2}\pi < \mu\theta + \varphi + \omega < \frac{4k+1}{2}\pi, \tag{10}$$

где k — целое число. При удалении x по этому пути $|\eta|$ будет, в случае положительности μ, бесконечно возрастать. Так как ω бесконечно мало, то неравенство (10) можно заменить следующим:

$$\frac{4k-1}{2}\pi - \frac{\varphi}{\mu} < 0 < \frac{4k+1}{2}\pi - \frac{\varphi}{\mu}. \tag{11}$$

При таком условии имеем

$$\underline{g}\rho^{\mu} < \rho^{\mu} r(1+\varepsilon)\cos(\mu\theta + \varphi + \omega) < \bar{g}\rho^{\mu},$$

где $\underline{g}$, $\bar{g}$ — некоторые положительные постоянные, и

$$e^{\underline{g}|x|^{\mu}} < |\eta| < e^{\bar{g}|x|^{\mu}}. \tag{12}$$

Мы в этом случае (при $\mu > 0$) говорим о *показательном возрастании первого класса* и пользуемся обозначением

$$\operatorname{cresc}[\exp^{(1)}].$$

Конечно, если путь берется в углах, отделяющих углы (11), то имеем

$$e^{-\bar{g}|x|^{\mu}} < |\eta| < e^{-\underline{g}|x|^{\mu}} \tag{13}$$

и

$$\lim_{x\to\infty} |\eta| = 0.$$

Но если $x = \infty$ не является полюсом $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$, то

$$\underline{g} < \left|\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}\right| < \bar{g}. \tag{5_0}$$

Если же $x = \infty$ — нулевая точка этой функции, то

$$\underline{g}\,|x|^{-\mu} < \left|\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}\right| < \bar{g}\,|x|^{-\mu} \tag{5_1}$$

и возрастание $|\eta|$ в этом случае не имеет места:

$$\underline{g} < |\eta| < \bar{g}. \tag{12_0}$$

§ 3. Теперь переходим к рассмотрению роста функций (4). С этой целью прежде всего устанавливаем понятие о *старшем члене построения*

$$\sum \varphi_j e^{\alpha_j(x)}$$

при движении x по положительной оси Ox.

Прежде всего, среди $\alpha_j(x)$ выбирается рациональная функция высшего порядка μ. Но таких дробей может оказаться *несколько*. Пусть это будут

$$\alpha_k(x) = A^{(k)}_{-\mu} x^{\mu} + A^{(k)}_{-\mu+1} x^{\mu-1} + \ldots, \tag{14}$$

$$A^{(k)}_{\nu} = B^{(k)}_{\nu} + iC^{(k)}_{\nu} \quad (\nu = -\mu, -\mu+1, -\mu+2, \ldots). \tag{15}$$

Тогда из $\alpha_k(x)$ выбираем ту, для которой $B^{(k)}_{-\mu}$ имеет *наибольшее* значение. Если же случится, что и таких функций $\alpha_{k_1}(x)$ несколько, то выберем из них ту функцию $\alpha_{k_2}(x)$, для которой $B^{(k)}_{-\mu+1}$ имеет наибольшее значение. Если получается опять несколько, то выбирается та, для которой $B^{(k)}_{-\mu+2}$ имеет наибольшее значение, и т. д.

Может случиться, что в конечном звене этого процесса получится для $B^{(k)}_{-1}$ несколько функций. Такой случай будем называть *особым*.

Предположим теперь, что в выражении (4) ни для числителя, ни для знаменателя не имеет места особый случай, отвечающий пути по Ox. Пусть $\alpha_1(x)$ и $\beta_1(x)$ — функции с наибольшими значениями коэфициентов B, т. е. старшие члены числителя и знаменателя. Тогда, представляя Θ в форме

$$\Theta = e^{\alpha_1(x)-\beta_1(x)}\frac{\varphi_1(x)}{\psi_1(x)}\frac{1+\frac{\varphi_2(x)}{\varphi_1(x)}e^{\alpha_2(x)-\alpha_1(x)}+\dots}{1+\frac{\psi_2(x)}{\psi_1(x)}e^{\beta_2(x)-\beta_1(x)}+\dots}, \tag{16}$$

видим, что возрастание Θ будет определяться только возрастанием

$$H = e^{\alpha_1(x)-\beta_1(x)}\frac{\varphi_1(x)}{\psi_1(x)}.$$

В самом деле,

$$\left|\frac{\varphi_k(x)}{\varphi_1(x)}e^{\alpha_k(x)-\alpha_1(x)}\right| = e^{-(B^{(1)}_{-\mu+l}-B^{(k)}_{-\mu+l})|x|^{\mu-l}}|x|^{\mu_k-\mu_1}\vartheta(x) \quad (l<\mu),$$

где $\vartheta(x)$ с возрастанием $|x|$ вдоль Ox стремится к *конечной* величине. Так как это выражение имеет пределом нуль, то получаем

$$\left|e^{\alpha_1(x)-\beta_1(x)}\frac{\varphi_1(x)}{\psi_1(x)}\right|(1+\varepsilon')<\Theta<\left|e^{\alpha_1(x)-\beta_1(x)}\frac{\varphi_1(x)}{\psi_1(x)}\right|(1+\varepsilon''),$$

где ε', ε'' — бесконечно малые величины.

Далее замечаем, что для достаточно больших $|x|$

$$e^{-\omega|x|^{\mu-l}}<|x|^{\mu_1-\nu_1}<e^{\omega|x|^{\mu-l}},$$

каково бы ни было ω, а также что

$$e^{\underline{g}'|x|^{\mu-l}}<\left|e^{\alpha_1(x)-\beta_1(x)}\right|<e^{\overline{g}'|x|^{\mu-l}},$$

если

$$\alpha_1(x)-\beta_1(x)=G^{(k)}_{-\mu+l}x^{\mu-l}+G^{(k)}_{-\mu+l+1}x^{\mu-l-1}+\dots,$$

$$G^{(k)}_{-j}=H^{(k)}_{-j}+I^{(k)}_{-j}i.$$

Полагая же $\underline{g}=\underline{g}'-\omega$, $\overline{g}=\overline{g}'+\omega$, получаем

$$e^{\underline{g}|x|^{\mu-l}}<H<e^{\overline{g}|x|^{\mu-l}}$$

и, наконец,

$$e^{\underline{g}|x|^{\mu-l}}<\Theta<e^{\overline{g}|x|^{\mu-l}}. \tag{17}$$

Теперь вместо пути Ox направим x, как в § 2, по какой-либо прямой, проходящей через начало координат.

Полагая $x = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$, имеем

$$A_{-\mu}^{(k)} - A_{-\mu}^{(l)} = (B_{-\mu}^{(k)} - B_{-\mu}^{(l)}) + i(C_{-\mu}^{(k)} - C_{-\mu}^{(l)}) = \alpha_{-\mu}^{(kl)} + i\beta_{-\mu}^{(kl)} =$$
$$= r_{-\mu}^{(kl)}(\cos\omega_{-\mu}^{(kl)} + i\sin\omega_{-\mu}^{(kl)}),$$

$$x^{\mu}(A_{-\mu}^{(k)} - A_{-\mu}^{(l)}) = \rho^{\mu} r_{-\mu}^{(kl)}\{\cos(\mu\theta + \omega_{\mu}^{(kl)}) + i\sin(\mu\theta + \omega_{\mu}^{(kl)})\}.$$

Старший член, отвечающий этому направлению, определяется из условия

$$\frac{4m-1}{2}\pi \leqslant \mu\theta + \omega_{\mu}^{(kl)} < \frac{4m+1}{2}\pi, \tag{18}$$

где m — целое число. Если $\mu\theta + \omega_{\mu}^{(kl)} = \frac{4m\pm1}{2}\pi$, то для сравнения следует брать следующую разность $A_{-\mu+1}^{(k)} - A_{-\mu+1}^{(l)}$, и т. д.

Для каждого определенного отдельного направления можно ожидать наличия *особого случая*. Если особые случаи имеют место для всех направлений θ, то главные части *всех* $\alpha(x)$ должны совпадать.

В самом деле, равенство

$$\rho r_{-\mu}^{(kl)}[\cos\mu\theta\cos\omega_{\mu}^{(kl)} - \sin\mu\theta\sin\omega_{\mu}^{(kl)}] = 0$$

для всех θ предполагает $r_{-\mu}^{(kl)} = 0$, т. е.

$$A_{-\mu}^{(k)} = A_{-\mu}^{(l)}.$$

Но если особый случай имеет место для всех путей, то вместо неравенства (17) получим

$$\underline{g}|x|^{\mu_1-\nu_1} < \theta < \overline{g}|x|^{\mu_1-\nu_1}, \tag{19}$$

т. е. степенное возрастание, а если $\mu_1 = \nu_1$, то

$$\underline{g} < \theta < \overline{g}. \tag{20}$$

§ 4. Теперь переходим к случаю $\zeta = \ln\alpha(x)$. Полагая $\alpha(x) = x^{\mu}\vartheta(x)$, где $\vartheta(x)$ имеет конечный предел и $\mu > 0$, и полагая

$$\vartheta(x) = r(1+\varepsilon)[\cos(\varphi+\omega) + i\sin(\varphi+\omega)] = r(1+\varepsilon)e^{(\varphi+\omega)i},$$

имеем

$$\zeta = \mu\ln|x| + \ln r(1+\varepsilon) + i(\varphi+\omega) + \mu i\theta.$$

Но в силу условия, наложенного на $\vartheta(x)$, мы можем написать

$$\mu\ln\underline{g}' < |x| = |\ln r(1+\varepsilon) + i(\varphi+\omega) + \mu i\theta| < \mu\ln\overline{g}', \tag{21}$$

откуда

$$\mu\ln|x| - \mu\ln\overline{g}' < |\zeta| < \mu\ln|x| + \mu\ln\overline{g}',$$

причем $x = |x|e^{i\theta}$ *возрастает в каком угодно направлении.*

Если $\mu = 0$, то неравенства (21) заменяются следующими:

$$\underline{g} < |\zeta| < \overline{g}. \tag{22}$$

Рассмотрим теперь общее выражение

$$\theta = \frac{\sum \varphi_{k,l,m,\ldots}[\ln\alpha(x)]^k[\ln\beta(x)]^l\ldots[\ln\gamma(x)]^n}{\sum \psi_{p,q,r,\ldots}[\ln\alpha(x)]^p[\ln\beta(x)]^q\ldots[\ln\gamma(x)]^s}. \tag{23}$$

Деля числитель и знаменатель на высшую степень x, входящую в $\varphi_{k,l,m,\ldots} : \psi_{p,q,r,\ldots}$, получим

$$\theta = x^{\mu-\nu} \frac{\Theta_0 + \frac{\Theta_1}{x} + \frac{\Theta_2}{x^2} + \ldots}{H_0 + \frac{H_1}{x} + \frac{H_2}{x^2} + \ldots},$$

где

$$\Theta_j = \sum C^{(j)}_{k,l,m,\ldots} [\ln \alpha(x)]^k [\ln \beta(x)]^l \ldots,$$

$C^{(j)}_{k,l,m,\ldots}$ — постоянные.

Но нетрудно убедиться в том, что

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\Theta_n}{x^n} = 0.$$

В самом деле, на основании неравенства (21) имеем

$$\frac{\mu (\ln \underline{g} x)^p}{x^n} < \frac{\ln^k \alpha(x) \ln^l \beta(x) \ldots}{x^n} < \frac{\mu (\ln \bar{g} x)^p}{x^n};$$

но, с другой стороны,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(\ln gx)^p}{x^n} = 0.$$

Далее,

$$K = \frac{\Theta_0}{H_0} = \frac{[\ln \alpha(x)]^k [\ln \beta(x)]^l \ldots [\ln \gamma(x)]^n}{[\ln \alpha(x)]^p [\ln \beta(x)]^q \ldots [\ln \gamma(x)]^s},$$

и на основании того же неравенства (21) возрастание K будет определяться неравенствами

$$|\mu| \ln \underline{g}| x| < K < |\mu| \ln \bar{g}| x|. \tag{24}$$

Если же K убывает, то

$$\frac{1}{|\mu| \ln \bar{g}| x|} < K < \frac{1}{|\mu| \ln \underline{g}| x|}.$$

Замечая далее, что

$$|\mu| \ln \bar{g}| x| < |x|^{\omega}$$

при всяком сколь угодно малом положительном ω, получаем для θ возрастание *степенного* характера, cresc $[\mathrm{dg}^{(1)}]$:

$$\underline{g}| x|^{\mu} < \theta < \bar{g}| x|^{\mu}. \tag{25}$$

Но если коэфициенты в θ при ln постоянные, рост будет только *логарифмического* характера, cresc $[\ln^{(1)}]$:

$$\mu (\ln \underline{g}| x|)^k < \theta < \mu (\ln \bar{g}| x|)^k. \tag{26}$$

Впрочем, и здесь возможно понижение: конечный предел и, наконец, убывание.

§ 5. Наконец, возьмем

$$\vartheta(x) = [\alpha(x)]^{\lambda} = e^{\lambda \ln \alpha(x)}.$$

Полагая

$$\lambda = a + bi, \quad x = \rho(\cos\theta + i \sin\theta) = \rho e^{i\theta}, \quad \alpha(x) = x^{\mu}\, \omega(x),$$

имеем

$$\vartheta = e^{a\mu \ln \rho - bv + au - \mu b\theta}\varphi(x),$$

где $|\varphi(x)|$ остается конечным при возрастании $|x|$.

Если θ задать определенное значение, то ϑ с возрастанием $\rho = |x|$ будет расти или убывать, смотря по тому, будет ли $a\mu > 0$ или $a\mu < 0$, причем

(27) $$\underline{g}|x|^{\mu a} < |\vartheta| < \bar{g}|x|^{\mu a};$$

при $\mu = 0$ мы имеем

$$\underline{g} < |\vartheta| < \bar{g}.$$

Следует отметить, что это верно, когда x идет по прямой 0∞; если же положить $\rho = \psi(\theta)$, т. е. направить x по некоторой кривой, то $a\mu \ln \rho - \mu b\theta$ и при $a\mu > 0$ может оказаться убывающей функцией. Для этого достаточно взять $\rho = A\theta$, где A выбрано так, что $a\mu - Ab < 0$, т. е. $A < \frac{a}{b}$.

Для рациональной функции от ϑ с *постоянными* коэфициентами имеем

(28) $$\Theta = e^{(\xi_1 - \eta_1)\ln|x|}\,\frac{\Theta_0 + e^{(\xi_2 - \xi_1)\ln|x|}\Theta_1 + \ldots}{H_0 + e^{(\xi_2 - \xi_1)\ln|x|}H_1 + \ldots}.$$

Член $e^{\xi_1 \ln|x|} = e^{a_1\mu_1 \ln|x|}$ мы берем *старший* (причем понятие о старшинстве теперь уже не зависит от θ), т. е. такой, что

$$a_1\mu_1 \geqslant a_2\mu_2 \geqslant a_3\mu_3 \geqslant \ldots$$

Из выражения (28) можем рост Θ охарактеризовать следующим образом:

(29) $$\underline{g}|x|^{\xi} < |\Theta| < \bar{g}|x|^{\xi}.$$

При $\xi_1 = \eta_1$ имеем $\underline{g} < |\Theta| < \bar{g}$.

Если коэфициенты непостоянны, то, представляя $|x|^s$ в виде $e^{s\ln|x|}$, мы можем повторить все наши рассуждения, считая старшим членом тот, которому отвечает наибольшее s или $a\mu$.

§ 6. Теперь переходим к выражению

(30) $$\Theta = \frac{\sum \Theta_j e^{\alpha_j(x)}}{\sum H_j e^{\beta_j(x)}}$$

при предположении, что Θ_j, H_j — целые функции от

$$\ln \gamma_j(x) \quad \text{и} \quad [\delta_j(x)]^{\lambda_j}.$$

Как в § 3, рост Θ будет определяться только ростом

$$e^{\alpha_1(x) - \beta_1(x)}\frac{\varphi_1(x)}{\psi_1(x)}.$$

В самом деле, на основании доказанного выше мы имеем

$$\underline{\sigma}(x) < \left|\frac{\varphi_1(x)}{\psi_1(x)}\right| < \bar{\sigma}(x),$$

где $\sigma(x) = g|x|^{\mu}$, $\mu \ln(g, |x|)$, g.

Имея в виду, что

$$e^{-\underline{g}|x|^{\mu}}\underline{\sigma}(x)<\left|\frac{\varphi_j(x)}{\varphi_1(x)}\right|e^{\alpha_j(x)-\alpha_1(x)}<e^{-\overline{g}|x|^{\mu}}\overline{\sigma}(x)$$

и что

$$\lim_{x\to\infty}e^{-\overline{g}|x|^{\mu}}\sigma(x)=0,$$

заключаем, что третий множитель в (16) и здесь имеет своим пределом единицу, а первый при надлежаще выбранном пути имеет рост показательного типа, так что

$$e^{\underline{g}|x|^{\mu}}<|\theta|<e^{\overline{g}|x|^{\mu}},$$

и только в исключительных случаях рост понижается в степенной.

§ 7. Идем дальше по пути обобщения. $\alpha_j(x)$ мы не обязательно должны считать рациональной функцией. В наших выводах нам нужно только *разложение* около полюса $x=\infty$:

$$A_{-\mu}x^{\mu}+A_{-\mu+1}x^{\mu-1}+\ldots+A_0+\frac{A_1}{x}+\ldots;$$

но все рассуждения остаются в силе и в случае *полюса-разветвления* с разложением

$$A_{-\mu/d}x^{\mu/d}+A_{-(\mu-1)/d}x^{(\mu-1)/d}+\ldots+A_0+A_1x^{-1/d}+\ldots$$

Мы получаем рост тоже показательного типа, определяемый неравенствами

$$(17_1)\qquad e^{\underline{g}|x|^{\mu/d}}<|\theta|<e^{\overline{g}|x|^{\mu/d}}.$$

Конечно, то же относится и к аргументам логарифмических и степенных функций.

Но для того чтобы охватить самый общий случай построения первого класса, следует рассмотреть ξ, определяемое уравнением

$$(31)\qquad \xi^n+A_1(x)\xi^{n-1}+\ldots+A_n(x)=0,$$

где $A_i(x)$ — построение уже рассмотренного *рационального* относительно трансцендентных типа.

Мы докажем, что если в $A_i(x)$ входят показательные функции, то ξ будет вообще показательного роста, который может опуститься до степенного; если $A_i(x)$ построено с помощью степенных функций, то рост — степенной; в том же случае, когда входят только логарифмические функции, рост — логарифмический.

Предположим сперва, что существует *один член* $A_j\xi^{n-j}$, удовлетворяющий условию

$$\lim_{x\to\infty}\frac{A_j(x)\xi^{n-j}}{A_k(x)\xi^{n-k}}=\infty,$$

где k отлично от j.

Тогда

$$\xi^n=-A_j(x)\xi^{n-j}\left[1+\sum_{k\neq j}\frac{A_k(x)\xi^{n-k}}{A_j(x)\xi^{n-j}}\right],$$

и рост, завися только от первых множителей, характеризуется неравенствами

$$e^{\underline{g}|x|^{\mu}}|\xi|^{n-j} < |\xi|^{n} < e^{\bar{g}|x|^{\mu}}|\xi|^{n-j},$$

откуда

$$e^{\underline{g}|x|^{\mu/j}} < |\xi| < e^{\bar{g}|x|^{\mu/j}},$$

т. е. для ξ рост *показательного* типа (17).

Если же

$$\lim_{x\to\infty}\frac{A_j(x)\,\xi^{n-j}}{A_k(x)\,\xi^{n-k}} = f,$$

где f ограничено, то уже из этого условия имеем

$$\underline{f}\,|A_k(x)|\,|\xi|^{n-k} < |A_j(x)|\,|\xi|^{n-j} < \bar{f}\,|A_k(x)|\,|\xi|^{n-k},$$

что дает в итоге тот же результат.

§ 8. Самое важное из всего полученного — то, что если дана функция *трансцендентных первого класса* (согласно измененной лиувиллевской классификации), то *возрастание показательного типа может быть только при наличии в построении показательных основных построений.*

Если мы, исследуя рост y, определяемого алгебраическим дифференциальным уравнением

(1) $$f(x,\ y,\ y') = 0,$$

обнаружим для некоторых путей рост показательного типа, то в случае выражаемости y в конечном виде с помощью элементарных трансцендентных мы не сможем y отнести ни к алгебраическому типу, ни к типу логарифмическому, т. е. не сможем отнести к типу

(32) $$y = \Pi(x,\ \zeta + \alpha),$$

где Π означает алгебраическую функцию от x и

(33) $$\zeta = \omega_0 + \sum_{i=0}^{n} \lambda_i \ln \chi_i,$$

причем λ_i — постоянные, а ω_0, χ_i — алгебраические функции, но только к показательному:

(34) $$y = \Pi(x,\ \alpha\vartheta),$$

где

(35) $$\vartheta = e^{\omega}(\chi_0)^{\lambda_0}(\chi_1)^{\lambda_1}\ldots(\chi_n)^{\lambda_n}.$$

Отрицательный результат относительно разрешимости уравнения (1) в конечном виде мы получим, если исследования по методу Брио и Букэ укажут, что в силу наличия логарифмической точки то же значение y должно быть отнесено к логарифмическому типу (32).

§ 9. Теперь нам следует обратиться к исследованию Бутру [4]) роста функции, определяемой алгебраическим диференциальным уравнением, причем для наших целей достаточно весьма немногое: только то, что относится к случаю показательного роста. Этот случай, как показывает Бутру, имеет место для уравнения типа

$$y' = \frac{b_0 + b_1 y + \ldots + b_p y^p}{a_1 + a_2 y + \ldots + a_{p-1} y^{p-1}}, \tag{36}$$

где a_i, b_i — полиномы, причем степень b_p не ниже степени a_p.

Мы ни в коем случае не можем ограничиться ссылкой на работу Бутру, так как нам необходимы результаты в *более общем виде*, а именно в том случае, когда y' является алгебраической функцией общего вида от (x, y).

Случай, отвечающий показательному росту, будет характеризоваться следующими условиями:

Если (1) представляется в виде

$$f_0(x, y) y'^m + f_1(x, y) y'^{m-1} + \ldots + f_m(x, y) = 0, \tag{37}$$

где $f_i(x, y)$ — полиномы от (x, y) и p_m — степень $f_m(x, y)$, так что

$$f_m(x, y) = A^{(m)}_{-p_m} y^{p_m} + A^{(m)}_{-p_m+1} y^{p_m-1} + \ldots, \tag{38}$$

то, обозначая через $\delta_y \varphi(x, y)$ степень $\varphi(x, y)$ относительно y, через $\delta \varphi(x)$ — степень $\varphi(x)$ относительно x, мы будем иметь эти условия в следующем виде:

$$\delta_y f_{m-j}(x, y) = \delta_y f_m(x, y) - j, \tag{39}$$

$$\delta A^{(k)}_{-p_k} > \delta A^{(0)}_{-p_0}. \tag{40}$$

Неравенство (31) мы можем написать в виде

$$y' = \overline{f} \sqrt[k]{\frac{f_k(x, y)}{f_0(x, y)}} \lambda, \tag{41}$$

где $\lambda = \cos\omega + i \sin\omega$, $\overline{f}\,\overline{\lambda} = \varphi(x)$ — функция, модуль которой изменяется в конечных границах.

Полагаем теперь

$$y = uv, \tag{42}$$

где

$$u = e^{\int \varphi(x) \sqrt[k]{A^{(k)}_{-p_k} / A^{(0)}_{-p_0}}\, dx}. \tag{43}$$

Рост $\varphi(x) = \frac{A^{(k)}_{-p_k}}{A^{(0)}_{-p_0}}$ будет степенного типа. Рост u показательного типа будет характеризоваться неравенствами

$$e^{\underline{g} |x|^{\mu/k+1}} < |u| < e^{\overline{g} |x|^{\mu/k+1}}, \tag{44}$$

---

[4]) Boutroux, Leçons sur les fonctions définies par les équations différentielles du premier ordre, Chap. II, p. 39. Paris 1908.

если

$$\delta A^{(k)}_{-p_k} - \delta A^{(0)}_{-p_0} = \mu.$$

Из (41) и (42) получаем

$$|v'| < \left| \frac{\varphi(x) \sqrt[k]{f(x, y)} - u'v \sqrt[k]{f_0(x, y)}}{u \sqrt[k]{f_0(x, y)}} \right|. \tag{45}$$

Замечая далее, что

$$f_0(x, y) = A^{(0)}_{-p_0} y^{p_0} + A^{(0)}_{-p_0+1} y^{p_0-1} + \dots,$$

$$\sqrt[k]{f_0(x, y)} = \sqrt[k]{A^{(0)}_{-p_0}}\, y^{p_0/k} \left[1 + \frac{1}{k} \frac{A^{(0)}_{-p_0+1}}{A^{(0)}_{-p_0}} \frac{1}{y} + \dots \right],$$

$$\sqrt[k]{f_k(x, y)} = \sqrt[k]{A^{(k)}_{-p_k}}\, y^{p_k/k} \left[1 + \frac{1}{k} \frac{A^{(k)}_{-p_k+1}}{A^{(k)}_{-p_k}} \frac{1}{y} + \dots \right],$$

по подстановке этих выражений в (45) мы получаем в числителе старшим членом

$$\sqrt[k]{A^{(0)}_{-p_0}} \frac{\varphi(x)}{k} \frac{A^{(0)}_{-p_0+1} - A^{(k)}_{-p_k+1}}{A^{(0)}_{-p_0}} y^{p_0'/k} + \dots$$

Если $\delta A^{(j)}_{-p_j+q} \leqslant \sigma$, то рост числителя λ в $v' = \frac{\lambda}{\mu}$ определяется неравенством

$$|\lambda| < \bar{g} |x|^{\sigma} |y|^{p_0/k} \sqrt[k]{|A^{(0)}_{-p_0}|}. \tag{46}$$

Будем теперь определять низшую границу знаменателя μ:

$$|\mu| > \underline{h} \sqrt[k]{|A^{(0)}_{-p_0}|}\, |y|^{p_0/k} |u| |y|.$$

А именно, ввиду (44)

$$|\mu| > \underline{h} |y|^{p_0/k} \sqrt[k]{|A^{(0)}_{-p_0}|}\, e^{\underline{g} |x|^{\mu/k+1}} |y|.$$

Предположим, что

$$|y| > |x|^{\sigma}; \tag{47}$$

тогда

$$|\mu| > \underline{h} |x|^{\sigma} |y|^{p_0/k} \sqrt[k]{|A^{(0)}_{-p_0}|},$$

и в силу (46) и (47)

$$|v'| = \left| \frac{\lambda}{\mu} \right| < \frac{\bar{g}}{\underline{h}} |x|^{\sigma} e^{-\underline{g} |x|^{\mu/k+1}}.$$

Отсюда находим, интегрируя левую часть:

$$\int_{\rho_0}^{\rho} |v'| \, d\rho > \left| \int_{\rho_0}^{\rho} v' \, d\rho \right| = v - v_0; \tag{48}$$

для правой части при достаточно больших $|x|$ имеем

$$P = \frac{\bar{g}}{\underline{h}} \int_{\rho_0}^{\rho} |x|^{\sigma} e^{-\underline{g} |x|^{\mu/k+1}} \, d|x| < \int_{\rho_0}^{\rho} e^{-(\underline{g}-\omega) |x|^{\mu/k+1}} |x|^{\mu/k} d|x|, \tag{49}$$

так как

$$\frac{\overline{g}}{\underline{h}}|x|^{\sigma}<|x|^{\mu/k}e^{+\omega|x|^{\mu/k+1}}\quad(\underline{g}-\omega)\left(\frac{\mu}{k}+1\right),$$

где ω — сколь угодно малая величина.

Произведя интегрирование в (48), мы на основании (47) получим

$$|v-v_0|<\left|e^{-\underline{k}|\rho_0|^{\mu/k+1}}-e^{-k|\rho_0|^{\mu/k+1}}\right|, \tag{50}$$

где $k=\underline{g}-\omega$.

Мы будем характеризовать возрастание только при надлежащем выборе произвольных постоянных, входящих в y, — иначе говоря, *начальных данных*. А именно, мы выбираем v_0 так, что

$$|v_0|>C+e^{-\underline{k}|\rho_0|^{\mu/k+1}}, \tag{51}$$

где C — постоянное, не зависящее от x_0.

Заметим далее, что

$$|v_0|-|v-v_0|<|v|=|v-v_0+v_0|<|v_0|+|v-v_0|,$$

а так как

$$C+e^{-\underline{k}\rho_0^{\mu/k+1}}>C,$$

то

$$C<|v|<|v_0|+e^{-\underline{k}\rho_0^{k/\mu+1}}.$$

Как отмечает Бутру, ограничение (47) мы можем теперь снять. Для начальных значений u_0, v_0 оно, конечно, выполняется, ибо при достаточно больших $|x_0|$

$$|u_0v_0|>|v_0|e^{\underline{k}|x_0|^{\mu/k+1}}>|x_0|^{\sigma}, \tag{52}$$

а также

$$C<|v_0|<|v_0|e^{-\underline{k}\rho_0^{\mu/k+1}}.$$

Далее, при возрастании $|x|$ неравенство (52) может прекратиться раньше (47), ибо всякий раз, когда (47) имеет место, имеет место и (52). Но и (47) не может прекратиться раньше (52), ибо при наличии (52) имеет место и неравенство (47). В самом деле, перемножая (44) и (52), получаем

$$|uv|>Ce^{\underline{g}|x|^{\mu/k+1}}>|x|^{\sigma} \tag{53}$$

при достаточно больших $|x|$.

Из (52) получаем аналогичной формы низшую границу и для $|y|$ и устанавливаем рост *показательного* типа, характеризуемый неравенствами

$$e^{\underline{g}|x|^{\nu}}<|y|<e^{\overline{g}|x|^{\nu}}. \tag{54}$$

Таким образом при указанных в начале § 9 условиях для уравнений (1) мы в случае выражаемости в конечном виде можем предполагать только форму показательного типа (54).

§ 10. Переходим теперь к *построениям второго класса*

$$\Phi\{e^{\alpha_1^{(1)}(x)},\ e^{\alpha_2^{(1)}(x)}\ldots;\ \ln\beta_1^{(1)}(x),\ \ln\beta_2^{(1)}(x),\ldots;\ [\gamma_1^{(1)}(x)]^{\lambda_1},\ [\gamma_2^{(1)}(x)]^{\lambda_2},\ldots\},$$

в которых $\alpha_j^{(1)}(x)$, $\beta_j^{(1)}(x)$, $\gamma_j^{(1)}(x)$ — уже не алгебраические функции, а трансцендентные построения *первого класса.*

Как и при исследованиях трансцендентных построений первого класса, начинаем с основного показательного построения

$$\eta^{(2)} = e^{\alpha^{(1)}(x)}.$$

Его рост определяется ростом трансцендентного построения первого класса $\alpha^{(1)}(x)$.

Предположим рост $\alpha^{(1)}(x)$ показательного типа, т. е.

$$e^{\underline{g}|x|^{\mu}} < |\alpha^{(1)}(x)| < e^{\overline{g}|x|^{\mu}}.$$

Тогда

$$\eta^{(2)} = e^{e^{\rho^{\mu} r^{\mu}[\cos(\mu\vartheta+\omega)+i\sin(\mu\vartheta+\omega)]} H(x)}\ \Omega(x), \tag{55}$$

где как $H(x)$, так и $\Omega(x)$ при возрастании $|x|$ остается конечным.

Мы можем также написать

$$e^{\rho^{\mu} r[\cos(\mu\vartheta+\omega)+i\sin(\mu\vartheta+\omega)]} H(x) = e^{\rho^{\mu} r\cos(\mu\vartheta+\omega)} P\{\cos[\rho^{\mu} r\sin(\mu\vartheta+\omega)] + i\sin[\rho^{\mu} r\sin(\mu\vartheta+\omega)]\}(\cos\alpha + i\sin\alpha),$$

где

$$\vartheta = \rho^{\mu} r\sin(\mu\vartheta+\omega+\alpha), \tag{56}$$

$$\eta^{(2)} = e^{e^{\rho^{\mu} r\sin(\mu\vartheta+\omega+\alpha)}\alpha^{\vartheta}} P(x), \tag{57}$$

причем $P(x)$ сохраняет конечное значение.

Посмотрим, при каких условиях $\eta^{(2)}$ будет бесконечно возрастать.

Это будет, если мы вместе с неравенствами (18) будем еще постулировать выполнение неравенств

$$\frac{4k-1}{2}\pi < \rho^{\mu} r\sin(\mu\vartheta+\omega+\alpha) < \frac{4k+1}{2}\pi. \tag{58}$$

Мы удовлетворим этим неравенствам, положив

$$\rho = \sqrt[k]{\frac{4k-1}{2}\pi\tau}, \tag{59}$$

где

$$A < \tau < \frac{4k+1}{4k-1}A, \tag{60}$$

$$|r\sin(\mu\vartheta+\omega+\alpha)| = \frac{1}{A}. \tag{61}$$

Задав A, можно всегда найти ϑ такое, чтобы оно, удовлетворяя (18), удовлетворяло бы и (61).

Что касается $\rho = |x|$, то оно может принимать только значения, заключающиеся в не примыкающих друг к другу промежутках.

Таким образом при выборе для x *прямолинейного пути* движение x будет *скачкообразным.*

Из (61) мы теперь получаем

$$e^{e^{|x|^k \underline{g}}} \underline{h}\, \underline{k} < |\eta^{(2)}| < e^{e^{|x|^{\mu}\, \bar{g}}}\, \bar{h}\, \bar{k}.$$

Замечая, что

$$e^{\underline{e}^{y}} < e^{y}\, k < e^{\bar{e}^{y}},$$

имеем возрастание, характеризуемое неравенствами

$$e^{e^{\underline{g}|x|^{\mu}}} < |\eta^{(2)}| < e^{e^{\bar{g}|x|^{\mu}}}, \tag{62}$$

которое будет *возрастанием показательного типа второго класса*, cresc [ex$^{(2)}$].

Нетрудно видеть, что если рост $\alpha^{(1)}(x)$ — логарифмического типа, то для $\eta^{(2)}$ получается рост типа *степенного*.

§ 11. Если в $\zeta^{(2)} = \ln \alpha^{(1)}(x)$ предполагать рост $\alpha^{(1)}(x)$ типа степенного, то в качестве путей для x мы можем брать любые прямые, идущие через начало координат, так как те пути, которые не приводят $\alpha^{(1)}(x)$ к ∞, приводят его к 0. $|\ln \alpha^{(1)}(x)|$ и в том и в другом случае будет бесконечно возрастать, причем $\zeta^{(2)}$ будет иметь рост *степенного* типа, cresc [dg$^{(1)}$]:

$$\underline{g}\,|x|^{\mu} < |\zeta^{(2)}| < \bar{g}\,|x|^{\mu}.$$

В том же случае, когда $\alpha^{(1)}$ имеет степенной рост, для $\zeta^{(2)}$ получаем рост логарифмического типа, а если $\alpha^{(1)}(x)$ имеет рост логарифмического типа, то получаем

$$|\mu|\ln^k[\nu \ln^l \underline{g}\,|x|] < |\zeta^{(2)}| < |\mu|\ln^k[\nu \ln^l \bar{g}\,|x|]. \tag{63}$$

Замечая, что при $|x|$ бесконечно больших

$$(\mu - \omega)\ln^k \ln^l(\underline{g}\,|x|) < |\mu|\ln^k[\nu \ln^l g\,|x|] < (\mu + \omega)\ln^k \ln^l \bar{g}\,|x|,$$

где ω бесконечно мало, приводим неравенство (63) к следующему:

$$|\mu|\ln^k \ln^l \bar{g}\,|x| < |\zeta^{(2)}| < |\mu|\ln^k \ln^l \bar{g}\,|x|. \tag{63'}$$

Это — рост логарифмического типа *второго класса*.

Для $\vartheta^{(2)} = [\alpha^{(1)}(x)]^{\lambda}$ указываем только окончательные результаты подобного исследования.

Рост показательный для $\alpha^{(1)}$ дает тоже показательный рост для $\vartheta^{(2)}$, степенной — степенной и, наконец, логарифмический — логарифмический.

§ 12. От основного трансцендентного построения можно перейти к общим.

Нам придется итти по пути, указанному в § 3. Я считаю достаточным отметить, что́ мы должны принимать за старший член.

Вместо разложения

$$\Omega(x) = A_{-\mu}x^{\mu} + A_{-\mu+1}x^{\mu-1} + \ldots + A_0 + \frac{A_1}{x} + \ldots$$

мы будем иметь

$$\Omega(x) = A_{-\mu}\eta_1^{\sigma_1}\eta_2^{\sigma_2}\ldots\eta_s^{\sigma_s} + \ldots = A_{-\mu}e^{\omega_{\mu}(x)} + A_{-\mu+1}e^{\omega_{\mu-1}(x)} + \ldots,$$

где A_j — уже не постоянные, но алгебраические функции от x. В случае построения второго класса θ, рационального относительно основных трансцендентных, рост θ будет определяться *старшим* из членов

$$e^{\sigma\rho^{\mu}r\cos(\mu\vartheta+\omega)}\cos[\rho^{\mu}r\sin(\mu\vartheta+\omega)][A^{(1)}_{-\mu\nu}x^{\nu}+\ldots].$$

Для определения старшего члена выбираются те, для которых $\sigma r\cos(\mu\vartheta+\omega)$ имеет наибольшее значение. Затем из тех, которые отвечают этому требованию, — те, для которых ν имеет наибольшее значение. Наконец, при данном ν, — тот, для которого вещественная часть

$$x^{\nu}(A^{(1)}_{-\mu\nu}-A^{(k)}_{-\mu\nu})=\rho^{\nu}r^{(1k)}_{-\mu\nu}[\cos(\mu\vartheta+\omega^{(1\nu)}_{\mu\nu})+i\sin(\mu\vartheta+\omega^{(1\nu)}_{\mu\nu})]$$

положительна.

Следует заметить, что если это выражение обращается в нуль для всех значений, удовлетворяющих условиям (60), (61) и (18), то, так как эти условия определяют некоторую непрерывную область для ϑ, удовлетворяются для всех значений ϑ и равенства $r^{(1k)}_{-\mu\nu}=0$, т. е. мы имеем совпадение главных частей всех $A^{(1)}_{-\mu\nu}x^{\nu}+\ldots$

В результате мы получаем, аналогично тому, как в § 3, 4, те же типы роста, что для основных построений высшего класса, и в качестве высшего — рост показательного типа второго класса, который может иметь место только при наличии в θ основных построений второго класса.

§ 13. Результат § 8 мы можем обобщить и на случай, когда в уравнении $f(x, y, y')=0$ f — трансцендентная первого класса относительно x.

В этом случае в формулах (33), (34) y уже не алгебраическое, а гипералгебраическое построение, причем в той же области, в которой построено $f(x, y, y')$. Если в f входят основные трансцендентные первого класса

$$\theta_1,\quad \theta_2,\quad \theta_3,\ldots,$$

то

$$\omega_i=\omega_i(x,\theta_1,\theta_2,\ldots),$$

$$\chi_i=\chi_i(x,\theta_1,\theta_2,\ldots),$$

где ω_i, χ_i — знаки алгебраических функций.

Возрастание показательного типа второго класса, конечно, является возможным только для показательного типа (34) в случае выражаемости y в конечном виде.

Можно указать теперь случай, когда решение уравнения

$$f(x, y, y')=0$$

должно наверно иметь при надлежащем выборе произвольного постоянного и пути для x рост показательного типа второго класса.

Из условий (39), (40) для уравнения (37) условие (39) остается, а условие (40) следует заменить другим, а именно предполагать *показательный рост* $\dfrac{A^{(k)}_{-p_k}}{A^{(0)}_{-p_0}}$.

При таких условиях рассуждениями, аналогичными рассуждениям § 9, устанавливаются неравенства

$$e^{e^{\underline{g}}|x|^{\nu}} < |y| < e^{e^{\bar{g}}|x|^{\nu}}. \tag{64}$$

§ 14. Мы не в состоянии уже из-за недостатка места подробно провести рассуждения, относящиеся к трансцендентным выше второго класса. Остановимся только на двух пунктах, которые могут представить главное затруднение, в то время как все остальные проводятся по образцу рассуждений для трансцендентных первого и второго классов.

Прежде всего остановимся на определении пути x при определении роста показательного типа для показательного построения.

Для построения третьего класса мы имеем вместо (57) построение в три этажа:

$$\eta^{(3)} = e^{e^{e^{\rho^{\mu}} r \cos(\mu\vartheta + \omega)} q \cos\vartheta} p \cos\varphi\, P(x), \tag{65}$$

где P сохраняет конечное значение,

$$\vartheta = \rho^{\mu} r \cos(\mu\vartheta + \omega + \alpha), \tag{66}$$

$$\varphi = q e^{\rho^{\mu} \cos(\mu\vartheta + \omega + \alpha)} r' \cos\{[\rho^{\mu} r \sin(\mu\vartheta + \omega + \alpha)] + \alpha'\}. \tag{67}$$

Условиям

$$\frac{4m-1}{2}\pi < \mu\vartheta + \omega < \frac{4m+1}{2}\pi, \tag{18}$$

$$\frac{4k-1}{2}\pi < \rho^{\mu} r \cos(\mu\vartheta + \omega + \alpha) < \frac{4k+1}{2}\pi, \tag{58}$$

как мы выше видели, мы можем удовлетворить.

К (58) и (59) следует еще прибавить условие

$$\frac{4l-1}{2}\pi < q e^{\rho^{\mu} \cos(\mu\vartheta + \omega + \alpha)} r' \cos[\rho^{\mu} r' \sin(\mu\vartheta + \omega + \alpha) + \alpha'] < \frac{4l+1}{2}\pi. \tag{68}$$

Оно разлагается на

$$\rho = \sqrt[\mu]{\ln\left(\frac{4l-1}{2}\pi\vartheta_1\right)}\,\lambda, \quad \lambda = \frac{1}{\cos(\mu\vartheta + \omega + \alpha)}, \tag{69}$$

$$B < \vartheta_1 < \frac{4l+1}{4l-1}B, \tag{70}$$

$$qr' \sin[\rho^{\mu} r \sin(\mu\vartheta + \omega + \alpha) + \alpha'] = \frac{1}{B}. \tag{71}$$

Мы найдем значения ρ, ϑ, удовлетворяющие поставленным условиям,

1) если убедимся, что можно найти такое ϑ, при котором удовлетворены неравенства (68) и равенства (61) и (71); это ввиду произвольности A и B всегда возможно;

2) если покажем, что всегда возможно найти такое l, что $\frac{4l-1}{2}\pi B\lambda$ окажется между $\frac{4k-1}{2}\pi A$ и $\frac{4k+1}{2}\pi A$. Тогда значение ρ можем брать в промежутке

$$\left[\frac{4l-1}{2}\pi B,\ \frac{4k+1}{2}\pi A\right].$$

В самом деле, решая неравенства

$$\frac{4k-1}{2}\pi A < \lambda \ln\left(\frac{4l-1}{2}\pi B\right) < \frac{4k+1}{2}\pi A, \tag{72}$$

получаем

$$\frac{1}{4}\left[\frac{2}{\pi B}e^{\frac{4k-1}{2}\frac{\pi A}{\lambda_2}}+1\right] < l < \frac{1}{4}\left[\frac{2}{\pi B}e^{\frac{4k+1}{2}\frac{\pi A}{\lambda_1}}+1\right]. \tag{73}$$

Условия (70), (59), (60) дают нам границы для $\sin(\mu 0+\omega+\alpha)$, а также для λ: $\lambda_1 < \lambda < \lambda_2$, которые не зависят от l.

Когда k велико, то мы можем взять для $\cos(\mu 0+\omega+\alpha)$ значение, близкое к единице.

Нетрудно убедиться, что, начиная с некоторого достаточно большого значения l, существуют целые значения k, удовлетворяющие этому неравенству.

В самом деле, разность

$$e^{\frac{4k+1}{2}\frac{\pi A}{\lambda_1}} - e^{\frac{4k-1}{2}\frac{\pi A}{\lambda_2}} > e^{\frac{2\pi kA}{\lambda_2}}\left(e^{\frac{\pi A}{2\lambda_2}} - e^{-\frac{\pi A}{2\lambda_2}}\right)$$

бесконечно возрастает вместе с k.

В случае трансцендентного построения четвертого класса мы совершенно таким же образом находим значение λ так, чтобы удовлетворить неравенствам

$$\lambda \ln\left(\frac{4l-1}{2}\pi B\right) < \nu \ln\lambda \ln\left(\frac{4p-1}{2}\pi C\right) < \frac{4k-1}{2}\pi A, \tag{74}$$

где l указанным выше способом определено в зависимости от k, и т. д.

Что касается выбора старшего члена в выражении $(q-1)$-го класса

$$\Omega^{(k,\,q-1)}(x) = A^{(k)}_{\sigma_1-\sigma_2-\ldots}\,\eta_1^{(q-1)\sigma_1}\eta_2^{(q-1)\sigma_2}\ldots\eta_s^{(q-1)\sigma_s} + \ldots,$$

служащего показателем для $e^{\Omega^{(k,\,q-1)}(x)}$ (трансцендентного q-го класса), где $A^{(k)}_{\sigma_1-\sigma_2-\ldots}$ представляют построения $(q-2)$-го класса, то мы должны искать тот, в котором

$$\eta = \eta_1^{\sigma_1}\eta_2^{\sigma_2}\ldots\eta_s^{\sigma_s} = e^{\Omega^{(k,\,q-2)}(x)},$$

$$\Omega^{(k,\,q-2)}(x) = A^{(k,\,q-2)}_{\tau_1-\tau_2-\ldots}\,\eta_1^{(q-2)\tau_1}\eta_2^{(q-2)\tau_2}\ldots\eta_u^{(q-2)\tau_u} + \ldots$$

таков, что его первый член является старшим в том смысле, как это устанавливается для $(q-2)$-го класса.

Затруднение возникает в том случае, если разности между $\Omega^{(k,\,q-2)}$, отвечающими равным старшим членам, представляют трансцендентные $(q-3)$-го класса. Тогда следует перейти к рассмотрению выражений

$$A^{(k)}_{\sigma_1-\sigma_2-\ldots}$$

и взять старшим тот $\Omega^{(k,\,q-1)}$, для которого это выражение является старшим (т. е. первый член которого старший).

Совершенно ясно, как получается конечный результат в случае трансцендентых не только третьего, но вообще q-го класса.

Только при наличии основных трансцендентных показательного типа q-го класса мы будем иметь рост показательного типа, который явится *высшим* типом и будет определяться неравенствами

$$e^{e^{e^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{e^{\underline{g}|x|^{\mu}}}}}}}} < |\theta| < e^{e^{e^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{e^{\overline{g}|x|^{\mu}}}}}}}}. \tag{75}$$

§ 15. Арифметические свойства функций, которые разлагаются в голоморфный ряд с рациональными коэфициентами и выражаются с помощью элементарных трансцендентных в конечном виде, дают возможность указать *низшую границу для коэфициентов таких рядов.*

Если обозначить через $\lambda(p)$ показатель делителя p, входящего в знаменатель a_j коэфициента разложения

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_j x^j + \ldots, \tag{76}$$

а через $\overline{p}$ — наибольший простой делитель, то

$$\frac{\lambda(p)}{n^k} < Nf, \tag{77}$$

$$\frac{\overline{p}}{n} < Nf, \tag{78}$$

где Nf — конечное число.

Тогда

$$p_1^{k_1} p_2^{k_2} \ldots p_s^{k_s} < p^{k_1 + k_2 + \ldots + k_s} < (nE)^{n^k (nE)} < n^{an^k + 1} < n^{n^l},$$

где E — конечное число, так как число простых чисел не больше самого числа $\overline{p}$, т. е. по (78) En.

Таким образом

$$|a_n| > \frac{1}{n^{n^l}}, \tag{79}$$

и разложение (76), не удовлетворяющее этому условию, например

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^{n^n}}, \tag{80}$$

ни в коем случае не может выражаться в конечном виде.

§ 16. Замечательно, что изучение роста функций приводит к установлению *высшей границы* для коэфициентов.

Мы предполагаем разложение (76) таким, что

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} = \infty, \tag{81}$$

т. е.

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0, \tag{81'}$$

иными словами, что y — целая функция.

Для того чтобы разложение (76) представляло функцию, выражаемую в конечном виде, необходимо, чтобы

$$|a_n| < \frac{M}{\rho^n}, \tag{82}$$

где ρ — высшая граница для модуля функции, получаемая из наших исследований.

Найдем *наименьшее* значение A для $\frac{M}{\rho^n}$. Тогда мы сможем написать неравенство

$$|a_n| < A. \tag{83}$$

На основании наших исследований можем написать

$$M = e^{e^{e^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{e^{\rho^\mu}}}}}}} = \mathrm{ex}^{(q)}(\rho^\mu).$$

Приравнивая производную от $\frac{M}{\rho^n}$ нулю, получаем

$$\frac{\omega'(\rho)\rho}{\omega(\rho)} = n,$$

откуда и определяется ρ.

Далее,

$$\omega'(\rho) = \mathrm{ex}^{(q)}(\rho^\mu)\,\mathrm{ex}^{(q-1)}(\rho^\mu)\ldots\mathrm{ex}^{(1)}(\rho^\mu)\,\mu\rho^{\mu-1},$$

$$\frac{\omega'(\rho)}{\omega(\rho)} = \mathrm{ex}^{(q-1)}(\rho^\mu)\ldots\mathrm{ex}^{(1)}(\rho^\mu)\,\mu\rho^{\mu-1};$$

$\rho_0 = \rho_{\min}$ будет определяться из уравнения

$$\mathrm{ex}^{(q-1)}(\rho^\mu)\ldots\mathrm{ex}^{(1)}(\rho^\mu)\,\mu\rho^\mu = n.$$

Без сомнения, ρ, определяемое уравнением

$$\mathrm{ex}^{(q-1)}(\rho^\mu) = n, \tag{84}$$

будет больше ρ_0, и так как при $\rho = \rho_0$ мы имеем минимум, то мы будем иметь для $\frac{M}{\rho^n}$ большее значение.

Но уравнение (84) нам дает

$$\rho = \sqrt[\mu]{\ln_{q-1} n},$$

и в силу (80), замечая, что

$$\omega(\rho) = e^{\mathrm{ex}^{(q-1)}(\rho^\mu)} = e^n,$$

мы получаем

$$|a_n| < \frac{e^n}{\left(\sqrt[\mu]{\ln_{q-1} n}\right)^n}. \tag{85}$$

Функция, удовлетворяющая (81), но не удовлетворяющая (85), не может быть выражена в конечном виде с помощью элементарных трансцендентных.

Таково всякое голоморфное разложение (76), коэфициенты которого a_n удовлетворяют неравенствам

$$\frac{1}{\left(\sqrt[\sigma(n)]{\ln_q n}\right)^n} < |a_n| < \frac{1}{\left(\sqrt[\tau(n)]{\ln_q n}\right)^n}, \tag{86}$$

где $\sigma(n)$, $\tau(n)$ бесконечно возрастают вместе с n.

Условие (81), без сомнения, выполняется.

Но (85) не выполняется, потому что при достаточно большом n

$$\frac{1}{\sqrt[\sigma(n)]{(\ln_q n)^n}} > \frac{e^n}{\sqrt[\mu]{(\ln_q n)^n}}.$$

О ПРИМИТИВНЫХ ГРУППАХ В ТРЕХ ПЕРЕМЕННЫХ.

В. В. Морозов (Казань).

1. Общие замечания. Как известно, примитивные группы в трех переменных были перечислены еще Ли (S. Lie, Theorie der Transformationsgruppen, т. III, стр. 122—140, Lpz. 1893 или 1930). В своей работе Ли пользовался геометрическими соображениями. В настоящей статье те же результаты получаются чисто алгебраическим методом, являющимся дальнейшим развитием метода, примененного Н. Г. Чеботаревым [1]) к изучению примитивных групп в пространстве двух измерений. В дальнейшем я намерен решить эту задачу для многомерных пространств.

Рассмотрим примитивную группу в трех переменных

$$x^1, \quad x^2, \quad x^3,$$

определяемую инфинитезимальными операторами

$$X_1, \quad X_2, \quad \ldots, \quad X_r.$$

Предполагая, что нулевая точка (0, 0, 0) не является особой точкой для операторов X, мы назовем *порядком* оператора

$$X = \xi^k p_k,$$

где

$$p_k = \frac{\partial}{\partial x^k},$$

наименьшую степень разложений ξ^k в ряды Маклорена. Известно, что примитивная группа в трех переменных содержит три независимых оператора нулевого порядка

$$X_i = p_i + \ldots \quad (i = 1, 2, 3);$$

операторы же более высоких порядков образуют так называемую стационарную подгруппу. Нашей задачей является определение этой подгруппы таким образом, чтобы между ней и полной группой не существовало промежуточных подгрупп (условие примитивности).

Условимся в дальнейшем, рассматривая какой-либо оператор

$$X = \xi^i p_i,$$

---

[1]) См. Н. Г. Чеботарев, „Теория непрерывных групп“, §§ 18—19 (готовится к печати). Изложенный там метод, как легко убедиться, применяется и в нашей статье (§ 3).

ограничиваться в нем для удобства рассуждений членами низшего порядка, отбрасывая остальные. В дальнейшем мы увидим, что это ограничение несущественно.

Итак, пусть

$$X_1 = p_1, \quad X_2 = p_2, \quad X_3 = p_3$$

— три независимых оператора нулевого порядка рассматриваемой примитивной группы, и пусть

$$Y = a_\alpha^\beta x^\alpha p_\beta$$

(предполагается суммирование по α и β от 1 до 3; знак двойного суммирования откидывается) — один из операторов первого порядка. Вводя матрицы

$$A = \|a_\alpha^\beta\|$$

(α — индексы строк, β — индексы столбцов),

$$X = \|x^1\, x^2\, x^3\|, \quad P = \left\| \begin{matrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{matrix} \right\|,$$

мы можем записать Y в виде

$$Y = XAP,$$

после чего, производя преобразование с неравным нулю определителем

$$\bar{x}^\alpha = b_\beta^\alpha x^\beta \quad (\alpha = 1, 2, 3),$$

или

$$\bar{X} = XB,$$

полагая

$$B = \| b_\beta^\alpha \|, \quad \bar{X} = \| \bar{x}^1\, \bar{x}^2\, \bar{x}^3 \|, \quad \bar{P} = \left\| \begin{matrix} \bar{p}_1 \\ \bar{p}_2 \\ \bar{p}_3 \end{matrix} \right\|,$$

мы легко получим, что

$$p_\beta = \frac{\partial \bar{x}^\gamma}{\partial x^\beta} \frac{\partial}{\partial \bar{x}^\gamma} = b_\beta^\gamma \bar{p}_\gamma,$$

т. е.

$$P = B\bar{P},$$

после чего имеем

$$Y = \bar{X}(B^{-1}AB)\bar{P},$$

так что после преобразования место матрицы A занимает преобразованная матрица

$$\bar{A} = B^{-1}AB.$$

Ближайшая задача заключается в преобразовании матрицы A к нормальной форме. Как известно, форма эта зависит от корней p_i характеристического уравнения матрицы A:

$$|A - \rho E| = 0,$$

каковые корни, называемые в дальнейшем *характеристическими числами* матрицы A, могут быть либо простыми, либо кратными. Первоначально мы разберем второй случай и покажем, что для примитивных групп он встретиться не может, т. е. невозможно, чтобы матрицы *всех* операторов первого порядка примитивной группы имели кратные характеристические числа.

2. Случай кратных корней. Одна лемма из алгебры матриц. Рассматривая несколько операторов первого порядка, заданных матрицами $A, B, \ldots$, мы видим, что матрицы

$$\lambda A + \mu B, \quad [AB] = AB - BA$$

также соответствуют операторам первого порядка нашей группы. Первое ясно, второе же следует из того, что если

$$Y_1 = a_\alpha^\beta x^\alpha p_\beta = XAP,$$
$$Y_2 = b_\alpha^\beta x^\alpha p_\beta = XBP,$$

то

$$[Y_1 Y_2] = (a_\alpha^\gamma b_\gamma^\beta - b_\alpha^\gamma a_\gamma^\beta) x^\alpha p_\beta,$$

т. е

$$[Y_1 Y_2] = X[AB]P.$$

Семейство матриц, обладающее тем свойством, что вместе с двумя матрицами A и B в него входят и любая линейная их комбинация $\lambda A + \mu B$, и альтернатор $[AB]$, называется обычно *лиевским кольцом* (Liescher Ring) матриц. Мы докажем следующую лемму:

Лемма. *Лиевское кольцо матриц 3-го порядка, все матрицы которого имеют кратные корни, непременно полуприводимо.*

Под полуприводимостью кольца матриц здесь понимается одновременная полуприводимость матриц кольца.

Действительно, кольцо матриц всегда имеет конечный базис (т. е. конечное число матриц, линейными комбинациями которых являются все матрицы кольца), в нашем случае насчитывающий не более девяти матриц. Выбираем между всеми возможными базисами максимальный

$$A_1, A_2, \ldots, A_m \quad (m \leqslant 9)$$

и пусть, как обычно,

$$S(A) = \operatorname{Spur} A = a_1^1 + a_2^2 + a_3^3,$$
$$N(A) = \operatorname{Norm} A = \det A.$$

Мы можем предположить, что среди элементов базиса найдется не более одного элемента со следом, не равным нулю. Действительно, если

$$S(A_1) \neq 0, \quad S(A_2) \neq 0,$$

то преобразование элемента базиса A_2

$$\overline{A}_1 = A_2 - \frac{S(A_2)}{S(A_1)} A_1$$

дает

$$S(\overline{A}_2) = 0.$$

Кроме того, среди элементов базиса со следом, равным нулю, найдется не более *одного* элемента с определителем, не равным нулю. Действительно, если

$$N(A_2) \neq 0, \quad N(A_3) \neq 0,$$

то, выбирая за λ один из корней уравнения

$$N(A_3 - \lambda A_2) = 0$$

и производя новое преобразование базиса

$$\bar{A}_3 = A_3 - \lambda A_2,$$

мы получили бы

$$N(\bar{A}_3) = 0, \quad S(\bar{A}_3) = S(A_3) - \lambda S(A_2) = 0.$$

Разберем теперь два случая:

1. Среди элементов базиса найдется элемент A_3, для которого

$$S(A_3) = N(A_3) = 0.$$

Этот случай имеет место всегда, если базис состоит более чем из двух элементов. Если ρ_1, ρ_2, ρ_3 — характеристические числа A_3, то вследствие требования $\rho_1 = \rho_2$ имеем

$$2\rho_1 + \rho_3 = 0, \quad \rho_1^2 \rho_3 = 0,$$

т. е. все характеристические числа A_3 суть нули, и A_3 приводится к одной из двух нормальных форм

$$\text{a)} \left\| \begin{matrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} \right\|, \quad \text{b)} \left\| \begin{matrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} \right\|.$$

1. а). A_3 приводится к виду $\left\| \begin{matrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} \right\|$.

Простой подсчет показывает, что если

$$A = \| a_\alpha^\beta \|$$

— *любая* матрица кольца, то

$$[A_3 A] = \left\| \begin{matrix} a_2^1 & a_2^2 - a_1^1 & a_2^3 \\ 0 & -a_2^1 & 0 \\ 0 & -a_3^1 & 0 \end{matrix} \right\|.$$

Характеристические числа этой матрицы суть a_2^1, $-a_1^2$, 0, и так как по крайней мере два из них совпадают, то

$$a_2^1 = 0$$

для всех матриц кольца.

Кроме того, матрица

$$A + \lambda A_3 = \left\| \begin{matrix} a_1^1 & a_1^2 + \lambda & a_1^3 \\ 0 & a_2^2 & a_2^3 \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 \end{matrix} \right\|$$

также имеет кратные характеристические числа при любом λ. Ее характеристическое уравнение имеет вид

$$f(\rho) + \lambda a_2^3 a_3^1 = 0,$$

где $f(\rho)$ означает левую часть характеристического уравнения при $\lambda = 0$. Составив его дискриминант (что можно сделать, приведя уравнение к нормальному виду и замечая, что коэфициент при λ при этом не меняется) и потребовав, чтобы он был равен нулю при всех значениях λ, мы убеждаемся в том, что

$$a_2^3 a_3^1 = 0.$$

Если $a_2^3 \neq 0$ хотя бы для одной матрицы, то линейная комбинация матриц $[A_3 A]$ и A_3 приводит к матрице

$$A_4 = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Альтернируя A_4 с A, находим

$$[A_4 A] = \begin{Vmatrix} a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 - a_1^1 \\ 0 & 0 & a_2^1 \\ 0 & 0 & -a_3^1 \end{Vmatrix},$$

откуда следует, что $a_3^1 = 0$ *для всех* матриц A. Таким образом для всех матриц A либо

$$a_2^1 = a_2^3 = 0,$$

либо

$$a_2^1 = a_3^1 = 0,$$

откуда следует полуприводимость кольца.

b). A_3 приводится к виду $\begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$.

Последовательно альтернируя ее с произвольной матрицей A, найдем

$$A_3' = [A_3 A] = \begin{Vmatrix} a_2^1 & a_2^2 - a_1^1 & a_2^3 - a_1^2 \\ a_3^1 & a_3^2 - a_2^1 & a_3^3 - a_2^2 \\ 0 & -a_3^1 & -a_3^2 \end{Vmatrix},$$

$$A_3'' = [A_3 A_3'] = \begin{Vmatrix} a_3^1 & a_3^2 - 2a_2^1 & a_3^3 - 2a_2^2 + a_1^1 \\ 0 & -2a_3^1, & a_2^1 - 2a_3^2 \\ 0 & 0 & a_3^1 \end{Vmatrix},$$

$$A_3''' = [A_3 A_3''] = \begin{Vmatrix} 0 & -3a_3^1 & 3a_2^1 - 3a_3^2 \\ 0 & 0 & 3a_3^1 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix},$$

$$A_3^{IV} = [A_3 A_3'''] = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 6a_3^1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Значит, $a_3^1 = 0$. Действительно, если $a_3^1 \neq 0$ хотя бы для одной матрицы кольца, то из рассмотрения A_3, A_3''', A_3^{IV} заключаем о наличии в кольце матриц

$$A_4 = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}, \quad A_5 = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}, \quad A_6 = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix},$$

и матрица

$$B = [A_3 A] - (a_2^2 - a_1^1) A_5 - (a_3^3 - a_2^2) A_6 - (a_2^3 - a_1^2 - \lambda) A_4 =$$

$$= \begin{Vmatrix} a_1^2 & 0 & \lambda \\ a_3^1 & -a_1^2 + a_3^2 & 0 \\ 0 & -a_3^1 & -a_3^2 \end{Vmatrix}$$

должна иметь кратные характеристические числа при любом λ. Между тем ее характеристическое уравнение напишется, как и ранее, так:

$$f(\rho) - \lambda (a_3^1)^2 = 0,$$

откуда $a_3^1 = 0$. Обращаясь снова к матрице $[A_3 A]$:

$$[A_3 A] = \begin{Vmatrix} a_2^1 & a_2^2 - a_1^1 & a_2^3 - a_1^2 \\ 0 & a_3^2 - a_2^1 & a_3^3 - a_2^2 \\ 0 & 0 & -a_3^2 \end{Vmatrix},$$

и требуя, чтобы она имела кратные характеристические числа, мы получаем одно из условий

$$(1) \qquad \begin{cases} a_2^1 = a_3^2 - a_2^1, \\ -a_3^2 = a_2^3 - a_1^2, \end{cases}$$

из которых следует, что $a_2^1 = a_3^2 = 0$. Действительно, рассмотрим матрицу

$$A + \lambda A_3 = \begin{Vmatrix} a_1^1 & a_1^2 + \lambda & a_1^3 \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 + \lambda \\ 0 & a_3^2 & a_3^3 \end{Vmatrix}.$$

Ее характеристическое уравнение имеет вид

$$f(\rho) + \lambda (a_2^1 + a_3^2) \rho - \lambda (a_2^1 a_3^3 + a_3^2 a_1^1) = 0.$$

Способом, аналогичным вышеуказанному, мы находим, что это уравнение имеет кратные корни при всяком λ только в том случае, если

$$(2) \qquad a_2^1 + a_3^2 = 0$$

(второе условие здесь не важно), а уравнение (2) в комбинации с любым из уравнений (1) дает

$$a_2^1 = a_3^2 = 0.$$

Сопоставляя это с равенством $a_3^1 = 0$, видим снова, что кольцо матриц полуприводимо, более того, приводимо к треугольному виду.

2. Среди элементов базиса нет элемента, для которого $S = N = 0$. В этом случае базис состоит из двух элементов A и B (случай одного

элемента базиса мы не рассматриваем ввиду его простоты), причем у одного из этих элементов, B, след равен нулю: $S(B)=0$, но $N(B)\neq 0$; напротив, $S(A)\neq 0$. Ввиду этого характеристическими числами B можно считать 1, 1 и -2 и привести B к форме

$$B=\left\|\begin{matrix}1 & \varepsilon & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{matrix}\right\|,$$

причем ε может быть равно нулю. Альтернатор $[AB]$ имеет след, равный нулю; следовательно, он выражается только через второй элемент базиса:

$$[AB]=\lambda B.$$

Выписывая подробно это матричное равенство, мы получаем

$$\lambda=0,$$

после чего легкий подсчет дает нам уравнения

$$a_3^1=0,\quad a_3^2=0,\quad a_2^3=0,\quad a_1^3=0,$$

т. е. в этом случае матричное кольцо вполне приводимо, и лемма доказана полностью.

Возвращаясь теперь к основной задаче, допустим, что матрицы всех операторов первого порядка данной группы имеют кратные характеристические числа. Согласно доказанной лемме лиевское кольцо этих матриц будет полуприводимо к одной из форм

$$\begin{cases} a_2^1=a_3^1=0,\\ a_1^2=a_1^3=0; \end{cases} \tag{3}$$

в первом случае p_2 и p_3, во втором случае p_1 образуют со стабильной подгруппой промежуточную подгруппу, и, следовательно, рассматриваемая группа не будет примитивной.

3. Случай простых корней. Этот случай легко исследуется непосредственным обобщением метода, изложенного в указанной выше в подстрочном примечании книге Н. Г. Чеботарева. Нормальная форма матрицы A будет диагональной матрицей, и канонической формой рассмотренного оператора будет

$$Y_1=a_\alpha x^\alpha p_\alpha,$$

где a_α — корни характеристического уравнения, и индекс суммирования α изменяется от 1 до 3. Кроме Y_1, найдется хотя бы один оператор первого порядка, линейно с ним не связанный:

$$Y_2=b_\alpha^\beta x^\alpha p_\beta;$$

иначе группа не была бы примитивной. Следовательно, будем иметь

$$\begin{cases} [Y_1Y_2]=Y_3=(a_\alpha-a_\beta)\ b_\alpha^\beta x^\alpha p_\beta,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ [Y_1Y_7]=Y_8=(a_\alpha-a_\beta)^6\, b_\alpha^\beta x^\alpha p_\beta. \end{cases} \tag{4}$$

Рассматривая эти равенства как уравнения с шестью неизвестными

$$b_i^k x^i p_k \quad (k \neq i)$$

($x^i p_i$ в них не входят), мы можем разрешить их относительно этих неизвестных, при условии, что определитель

$$|(a_\alpha - a_\beta)^k| \quad (\alpha \neq \beta) \tag{5}$$

не равен нулю (здесь $k = 1, 2, \ldots, 6$ — индекс строки, $\alpha, \beta = 1, 2, 3$ — индекс столбцов). Определитель же этот, как известно, обращается в нуль только в том случае, если две из разностей $a_\alpha - a_\beta$ совпадают, т. е., подбирая соответствующую нумерацию переменных, если

$$a_3 - a_2 = a_2 - a_1,$$

иначе говоря, — если характеристические числа составляют арифметическую прогрессию. Исследование этого случая мы отложим до следующего параграфа.

Итак, пусть определитель (5) не равен нулю. Тогда между операторами первого порядка нашей группы найдутся операторы

$$b_i^k x^i p_k \quad (i \neq k),$$

а следовательно, и операторы

$$Y_k^i = x^i p_k \quad (i \neq k). \tag{6}$$

Действительно, если бы, например, для *всех* операторов первого порядка имело место равенство $b_2^1 = 0$, т. е. если бы $x^2 p_1$ не входило в серию (6), то для *всех* операторов также должно было бы быть или $b_2^3 = 0$, или $b_3^1 = 0$ (в силу условия $[x^2 p_3, x^3 p_1] = x^2 p_1$). Но при выполнении одного из этих условий для всех операторов группы последняя не может быть примитивной, так как в первом случае p_2, во втором p_2 и p_3 давали бы со стабильной группой промежуточную подгруппу.

Итак, установлено наличие операторов (6) среди операторов первого порядка данной группы. Вместе с ними входят и операторы

$$[Y_k^i, Y_i^k] = x^i p_i - x^k p_k.$$

Если, кроме того, присутствует хотя бы один независимый от них оператор, то присутствуют и все операторы $x^i p_k$. Таким образом получается два типа групп:

Тип 1 с операторами

$$\boxed{\begin{array}{c} p_i, \quad x^i p_k \quad (i \neq k), \\ x^1 p_1 - x^2 p_2, \quad x^2 p_2 - x^3 p_3. \end{array}}$$

Тип 2 с операторами

$$\boxed{p_i, \quad x^i p_k.}$$

Приступим теперь к исследованию операторов высших порядков. Заметим, что если

$$Z = \xi^1 p_1 + \xi^2 p_2 + \xi^3 p_3$$

— такой оператор и $\xi^1 \neq 0$, то, альтернируя его последовательно с $x^1 p_2$ и $x^1 p_3$, мы будем каждый раз повышать в ξ^1 степень x^1 за счет x^2 и x^3, так что в конце концов приведем его к виду

$$Z = (x^1)^s p_1 + \xi^2 p_2 + \xi^3 p_3.$$

Допустим, что Z — оператор *наивысшего* порядка. Тогда

$$Z_1 = [X_1 Z] = s (x^1)^{s-1} p_1 + \ldots,$$

$$[Z_1 Z] = s (x^1)^{2s-2} p_1 + \ldots,$$

и так как s есть наивысший возможный порядок, то $2s - 2 \leqslant s$, т. е.

$$s \leqslant 2.$$

Примитивная группа не содержит операторов выше второго порядка.

Пусть же один из операторов второго порядка приведен к канонической форме

$$Z = (x^1)^2 p_1 + a^\gamma_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta p_\gamma \quad (\alpha = 1, 2, 3;\ \beta = 1, 2, 3;\ \gamma = 2, 3)$$

(причем $a^i_{ki} = a^i_{ik}$). Исследуем коэфициенты этой формы. Имеем

$$Z_1 = [Y^1_2 Z] = -(x^1)^2 p_2 + 2a^\gamma_{2\beta} x^1 x^\beta p_\gamma,$$

$$Z_2 = [Y^1_2 Z_1] = 2a^\gamma_{22} (x^1)^2 p_\gamma,$$

$$Z_3 = [x^2 p_2 - x^3 p_3,\ Z_2] = -2a^2_{22} (x^1)^2 p_2 + 2a^3_{22} (x^1)^2 p_3,$$

$$Z_4 = [x^3 p_2,\ Z_3] = -2a^3_{22} (x^1)^2 p_2,$$

и если $a^3_{22} \neq 0$, то среди операторов второго порядка найдется $(x^1)^2 p_2$; но

$$[(x^1)^2 p_2,\ Z] = 2a^\gamma_{2\beta} (x^1)^2 x^\beta p_\gamma - 2 (x^1)^3 p_3,$$

что невозможно, ибо операторы третьего порядка отсутствуют. Следовательно, $a^3_{22} = 0$, и вообще

$$a^k_{ii} = 0 \quad (i \neq 1).$$

Далее, альтернируя Z трижды с Y^2_1, найдем оператор

$$-6a^2_{11} (x^2)^2 p_1,$$

откуда тем же способом заключаем, что $a^2_{11} = 0$, так что всегда

$$a^k_{ii} = 0 \quad (i = 1, 2, 3;\ k = 1, 2, 3);$$

следовательно, оператор Z, за исключением первого члена, линеен относительно каждого из переменных x^1, x^2, x^3. Теперь составляем оператор

$$Z_5 = [Y^1_i [Y^1_k Z]] = 2a^\gamma_{ki} (x^1)^2 p_\gamma \quad (i \neq k,\ 1;\ k \neq 1),$$

откуда убеждаемся, что $a^l_{ki}=0$ при $i\neq k$ и $i,\ k\neq 1$, ибо в противном случае

$$Z_6=\frac{1}{2a^l_{ki}}[Z_5,\ x^l p_r]=(x^1)^2 p_r,$$

$$[(x^1)^2 p_r,\ x^r p_l]=(x^1)^2 p_l,$$

$$[(x^1)^2 p_k,\ Z]=2a^\gamma_{k\beta}(x^1)^2 x^\beta p_\gamma-2(x^1)^3 p_k,$$

что невозможно; значит, вообще

$$a^l_{ki}=0\quad (i,\ k\neq 1),$$

и осталось исследовать коэфициенты вида a^l_{1k}.

Прежде всего

$$[Y^1_k,\ Z]=2a^\gamma_{1k}(x^1)^2 p_\gamma-(x^1)^2 p_k$$

и, при $k\neq l$, альтернирование с $x^l p_k$ дает оператор $a^l_{1k}(x^1)^2 p_k$, откуда снова

$$a^l_{1k}=0\quad (k\neq l),$$

и мы привели оператор Z к форме

$$Z=(x^1)^2 p_1+a_\alpha x^1 x^\alpha p_\alpha.$$

Здесь имеем при $k\neq i$

$$Z_7=[Y^i_k,\ Z]=(a_k-a_i)x^1 x^i p_k,$$
$$Z_8=[Y^k_i,\ Z]=(a_i-a_k)x^1 x^k p_i,$$
$$[Z_7,\ Z]=(a_k-a_i)(a_k-a_i-1)(x^1)^2 x^i p_k,$$
$$[Z_8,\ Z]=(a_i-a_k)(a_i-a_k-1)(x^1)^2 x^k p_i,$$

откуда следует

$$a_i=a_k=a,\quad Z=(x^1)^2 p_1+ax^1 x^\alpha p_\alpha.$$

Наконец,

$$Z_9=[Y^1_2,\ Z]=(a-1)(x^1)^2 p_2,$$
$$Z_{10}=[Y^3_1,\ Z_7]=2(a-1)x^1 x^3 p_2,$$
$$[Z_{10},\ Z]=-2(a-1)(x^1)^2,$$

т. е. $a=1$, откуда следует, что канонической формой оператора второго порядка является форма

$$Z_1=(x^1)^2 p_1+x^1 x^\beta p_\beta=x^1 x^\alpha p_\alpha\quad (\beta=2,\ 3;\ \alpha=1,\ 2,\ 3).$$

Вывод справедлив для обоих найденных типов групп.

Теперь легко закончить исследования этого параграфа. Равенство

$$[p_1,\ Z_1]=2x^1 p_1+x^2 p_2+x^3 p_3$$

показывает, что тип 1 нельзя расширить введением операторов второго порядка. Напротив, тип 2 допускает такое присоединение, но наряду с Z_1 должны существовать операторы

$$Z_2=[Y^2_1,\ Z_1]=x^2 x^\alpha p_\alpha,\quad (\alpha=1,\ 2,\ 3).$$
$$Z_3=[Y^3_1,\ Z_1]=x^3 x^\alpha p_\alpha$$

Совокупностью этих трех операторов исчерпываются независимые операторы второго порядка. В самом деле, для любого Z, пользуясь ими, можно исключить из ξ^1 переменную x^1, так что любой независимый от них оператор второго порядка можно привести к виду

$$Z_4 = b_{\alpha\beta}\, x^\alpha x^\beta p_1 + a^\gamma_{\alpha\beta}\, x^\alpha x^\beta p_\gamma \quad (\alpha,\ \beta = 1,\ 2,\ 3;\ \gamma = 2,\ 3;\ b_{1\alpha} = 0).$$

Но тогда

$$[Z_1,\ Z_4] = a^\gamma_{\alpha\beta}\, x^1 x^\alpha x^\beta p_\gamma - b_{\alpha\beta}\, x^\alpha x^\beta x^\gamma p_\gamma,$$

откуда следует

$$b_{\alpha\beta} = 0, \quad a^\gamma_{\alpha\beta} = 0.$$

Таким образом мы установили еще один тип примитивных групп:

Тип 3 с операторами

$$\boxed{p^i,\ x^i p_k,\ x^i x^\alpha p_\alpha}\ ^2).$$

Выводы этого параграфа легко обобщаются на случай n переменных.

4. Случай, когда определитель (5) обращается в нуль. Осталось разобрать случай, когда все операторы группы, не имеющие кратных корней, имеют корни, расположенные в арифметической прогрессии, так что определитель (5) обращается в нуль. Прежде всего мы имеем здесь

$$\rho_1 = \rho - \Delta, \quad \rho_2 = \rho, \quad \rho_3 = \rho + \Delta,$$

так что каноническая форма оператора Y_1 будет

$$Y_1 = \rho\,(x^1 p_1 + x^2 p_2 + x^3 p_3) - \Delta\,(x^1 p_1 - x^3 p_3).$$

Рассмотрим теперь произвольный оператор

$$Y = a^\beta_\alpha x^\alpha p_\beta.$$

Альтернируя его последовательно четыре раза с Y_1, мы приходим к выводу о существовании в нашей группе операторов

$$(7)\qquad \begin{cases} Y_2 = a^1_2 x^2 p_1 + a^2_3 x^3 p_2, \\ Y_3 = a^2_1 x^1 p_2 + a^3_2 x^2 p_3, \\ Y_4 = a^1_3 x^3 p_1, \\ Y_5 = a^3_1 x^1 p_3, \end{cases}$$

откуда сейчас же вытекают условия

$$(8)\qquad \begin{cases} a^1_2 a^2_3 a^3_1 = 0, \\ a^1_3 a^2_1 a^3_2 = 0; \end{cases}$$

в противном случае хотя бы один из операторов $Y_2 + Y_5$ или $Y_3 + Y_4$ имел бы простые корни (характеристические числа), не находящиеся

---

[2]) Этот результат, равно как и каноническая форма оператора второго порядка, были впервые даны Ли; см. S. Lie, Ges. Abhandlungen, Bd. V, стр. 140—156.

в арифметической прогрессии. Но, как уже указано, невозможно, чтобы для всех операторов примитивной группы было

$$a_k^i = a_l^i = 0 \quad (i \neq k,\ i \neq l,\ l \neq k),$$

или

$$a_i^k = a_i^l = 0,$$

так как в первом случае p_i, во втором p_k и p_l дают со стабильной подгруппой промежуточную подгруппу. Таким образом, если для *какого-либо* из операторов имеет место $a_3^2 \neq 0$ и $a_1^3 \neq 0$, т. е. $a_2^1 = 0$, то и для *всякого другого* оператора будет $a_2^1 = 0$. Действительно, пусть существует еще оператор

$$Y = \bar{a}_\alpha^\beta x^\alpha p_\beta,$$

и для него

$$\bar{Y}_2 = \bar{a}_2^1 x^2 p_1 + \bar{a}_3^2 x^3 p_2; \quad \bar{Y}_3 = \bar{a}_1^2 x^1 p_2 + \bar{a}_2^3 x^2 p_3;$$
$$\bar{Y}_4 = \bar{a}_3^1 x^3 p_1; \qquad \bar{Y}_5 = \bar{a}_1^3 x^1 p_3.$$

Из рассмотрения оператора $\bar{Y}_2 + Y_5$ заключаем, что

$$\bar{a}_2^1 \bar{a}_3^2 a_1^3 = 0,$$

и так как $a_1^3 \neq 0$, то

$$\bar{a}_2^1 \bar{a}_3^2 = 0.$$

Но если $\bar{a}_3^2 = 0$, то для оператора $Y_2 + \bar{Y}_2 + Y_5$ опять-таки следует

$$\bar{a}_2^1 a_3^2 a_1^3 = 0,$$

т. е. $\bar{a}_2^1 = 0$. Итак, $a_2^1 = 0$ для всякого оператора. Однако тогда должны, вследствие сделанного выше замечания, найтись операторы, для которых $a_3^1 \neq 0$ и $a_2^3 \neq 0$ и, следовательно, $a_1^2 = 0$. Последнее равенство опять-таки имеет место для всех операторов.

Среди операторов первого порядка найдутся, следовательно,

$$x^3 p_2, \quad x^2 p_3, \quad x^1 p_3, \quad x^3 p_1;$$

однако

$$(x^1 p_3, \quad x^3 p_2) = x^1 p_2,$$

в противоречие с условием $a_1^2 = 0$. Таким образом невозможно, чтобы для какого-либо из операторов первого порядка имело место

$$a_3^2 a_1^3 \neq 0.$$

Таким образом

$$a_3^2 a_1^3 = 0,$$

и аналогично

$$a_2^1 a_1^3 = 0.$$

Допустим, что $a_1^3 \neq 0$. Тогда для всех операторов тождественно

$$a_2^1 = a_3^2 = 0.$$

Но в этом случае найдутся операторы, для которых

$$a_3^1 \neq 0, \quad a_2^3 \neq 0.$$

Пусть же $\overline{Y}$ — такой оператор (в случае необходимости можно взять линейную комбинацию операторов), что

$$a_3^1 a_2^3 \neq 0.$$

В нем необходимо $a_1^2 = 0$, и, следовательно, можно положить

$$\overline{Y}_3 = x^2 p_3, \quad \overline{Y}_4 = x^3 p_1.$$

Но тогда

$$[\overline{Y}_3 \overline{Y}_4] = x^2 p_1,$$

в противоречие с равенствами $a_2^1 = 0$. Следовательно, $a_1^3 = 0$, и точно так же $a_3^1 = 0$, т. е. из операторов Y остаются только два:

$$(9) \qquad \begin{cases} Y_2 = a_2^1 x^2 p_1 + a_3^2 x^3 p_2, \\ Y_3 = a_1^2 x^1 p_2 + a_2^3 x^2 p_3, \end{cases}$$

причем для всякого другого оператора $\overline{Y}$ имеем $\overline{Y}_2 = \alpha Y_2$, $\overline{Y}_3 = \beta Y_3$, ибо в противном случае нашлись бы отдельно операторы $x^2 p_1$ и $x^3 p_2$ и, следовательно,

$$[x^3 p_2, \ x^2 p_1] = x^3 p_1,$$

что невозможно.

Оператор

$$Y_6 = [Y_3 Y_2] = a_1^2 a_2^1 (x^1 p_1 - x^2 p_2) + a_2^3 a_3^2 (x^2 p_2 - x^3 p_3)$$

не может иметь кратных корней, так как тогда оператор

$$Y_6 + \alpha Y_1$$

при некоторых значениях α имел бы простые корни, не находящиеся в арифметической прогрессии. Значит, корни Y_6 находятся в арифметической прогрессии, т. е.

$$a_2^1 a_1^2 = a_2^3 a_3^2,$$

и так как ни одно из входящих сюда a не может быть нулем в силу замечания, сделанного выше, то операторы (9) приводятся к виду

$$Y_2 = x^2 p_1 + k x^3 p_2, \quad Y_3 = x^1 p_2 + \frac{1}{k} x^2 p_3,$$

причем преобразование растяжения $\overline{x}^3 = k x^3$ позволяет привести их к окончательной форме

$$Y_2 = x^2 p_1 + x^3 p_2, \quad Y_3 = x^1 p_2 + x^2 p_3.$$

Замечая, что $[Y_3, \ Y_2] = x^1 p_1 - x^3 p_3$, мы можем установить еще два типа примитивных групп с операторами не выше первого порядка:

Тип 4:

$$\boxed{p_i, \ x^1 p_1 - x^3 p_3, \quad x^2 p_1 + x^3 p_2, \quad x^1 p_2 + x^2 p_3.}$$

Тип 5:

$$p_i,\quad x^1p_1-x^3p_3,\quad x^1p_1+x^2p_2+x^3p_3,\quad x^2p_1+x^3p_2,\quad x^1p_2+x^2p_3.$$

Входящие сюда операторы первого порядка мы занумеруем так:

$$(10)\qquad \begin{cases} Y_1=x^2p_1+x^3p_2, & Y_2=x^1p_2+x^2p_3,\\ Y_3=x^1p_1-x^3p_3, & Y_4=x^1p_1+x^2p_2+x^3p_3. \end{cases}$$

Для операторов второго порядка можно было бы развить теорию, аналогичную изложенной в § 3, но можно сконструировать их и простым алгебраическим счетом. Именно, взяв оператор

$$Z=a^{\gamma}_{\alpha\beta}x^{\alpha}x^{\beta}p_{\gamma}$$

и потребовав, чтобы его альтернаторы с p_1, p_2, p_3 линейным образом выражались через преобразования (10):

$$[p_i, Z]=\lambda_iY_1+\mu_iY_2+\nu_iY_3+\sigma_iY_4\quad (i=1,\ 2,\ 3),$$

мы приходим к системе 27 уравнений с 30 неизвестными, которая чрезвычайно легко решается и дает нам операторы

$$Z_1=2(x^1)^2p_1+2x^1x^2p_2+(x^2)^2p_3,$$
$$Z_2=(x^2)^2p_1+2x^2x^3p_2+2(x^3)^2p_3,$$
$$Z_3=2x^1x^2p_1+(2x^1x^3+(x^2)^2)p_2+2x^2x^3p_3,$$

причем $(Y_1,\ Z_1)=Z_3$, $(Y_1,\ Z_3)=Z_2$, $(Y_2,\ Z_3)=Z_1$ и для Z_1 $\sigma_1\neq 0$.

Таким образом группа типа 4 не может быть расширена введением операторов высшего порядка; напротив, группа типа 5 допускает такое расширение.

Операторы третьего порядка существовать, как и ранее, не могут. Это можно подтвердить и алгебраически, взяв оператор

$$U=a^{\delta}_{\alpha\beta\gamma}x^{\alpha}x^{\beta}x^{\gamma}p_{\delta}$$

и потребовав, чтобы его альтернаторы с p_i выражались через операторы (10), что сейчас же дает $a^{\delta}_{\alpha\beta\gamma}=0$. Таким образом мы устанавливаем существование последнего типа примитивных групп:

Тип 6:

$$p_i,\quad x^2p_1+x^3p_2,\quad x^1p_2+x^2p_3,$$
$$x^1p_1-x^3p_3,\quad x^1p_1+x^2p_2+x^3p_3,$$
$$2(x^1)^2p_1+2x^1x^2p_2+(x^2)^2p_3,\quad (x^2)^2p_1+2x^2x^3p_2+2(x^3)^2p_3,$$
$$2x^1x^2p_1+(2x^1x^3+(x^2)^2)p_2+2x^2x^3p_3.$$

5. Исследование полученных типов групп. Нам предстоит еще показать, что преобразованием переменных действительно можно добиться исчезновения в полученных операторах членов высших порядков. Мы

сделаем это для основного типа 3. Найденные нами укороченные операторы

$$\overline{X}_i = p_i, \quad \overline{Y}^l_k = x^l p_k, \quad \overline{Z}^i = x^i x^\alpha p_\alpha \tag{11}$$

удовлетворяют структурным соотношениям

$$\begin{cases} [\overline{Z}^i, \overline{Z}^k] = 0, \quad [\overline{Y}^i_k, \overline{Z}^l] = \delta^l_k \overline{Z}^i; \\ [\overline{Y}^i_k, \overline{Y}^l_m] = \delta^i_m \overline{Y}^l_k - \delta^l_k \overline{Y}^i_m, \quad [\overline{X}_i, \overline{Z}^k] = \overline{Y}^k_i + \delta^k_i \overline{Y}^\alpha_\alpha; \\ [\overline{X}_i, \overline{Y}^k_l] = \delta^k_i \overline{X}_l, \quad [\overline{X}_i, \overline{X}_k] = 0, \end{cases} \tag{12}$$

где δ^l_k — символ Кронекера; по α ведется суммирование. Если же принять во внимание члены высших порядков и записать, следовательно, операторы полностью:

$$\begin{cases} X_i = p_i + \ldots, \\ Y^i_k = x^i p_k + \ldots, \\ Z^i = x^i x^\alpha p_\alpha + \ldots, \end{cases} \tag{13}$$

то структурные соотношения примут следующий вид:

$$\begin{cases} [Z^i, Z^k] = 0, \\ [Y^i_k, Z^l] = \delta^l_k Z^i, \\ [Y^i_k, Y^l_m] = \delta^i_m Y^l_k - \delta^l_k Y^i_m + a^{il}_{km\alpha} Z^\alpha, \\ [X_i, Z^k] = Y^k_i + \delta^k_i Y^\alpha_\alpha + a^k_{i\alpha} Z^\alpha, \\ [X_i, Y^k_l] = \delta^k_i X_l + b^{k\beta}_{il\alpha} Y^\alpha_\beta + a^k_{il\alpha} Z^\alpha, \\ [X_i, X_k] = b^\beta_{ik\alpha} Y^\alpha_\beta + a_{ikx} Z^\alpha. \end{cases} \tag{14}$$

Займемся теперь нормированием операторов, т. е. уничтожением членов высших порядков в правых частях соотношений (14). Прежде всего рассмотрим таблицу операторов Y^k_i:

$$\begin{matrix} Y^1_1, & Y^2_1, & Y^3_1, \\ Y^1_2, & Y^2_2, & Y^3_2, \\ Y^1_3, & Y^2_3, & Y^3_3, \end{matrix} \tag{15}$$

и покажем, что можно нормировать ее построчно. В самом деле, если

$$\begin{aligned} [Y^1_1, Y^2_1] &= Y^2_1 + a_\alpha Z^\alpha, \\ [Y^1_1, Y^3_1] &= Y^3_1 + b_\alpha Z^\alpha, \\ [Y^2_1, Y^3_1] &= \quad c_\alpha Z^\alpha, \end{aligned}$$

то преобразование операторов

$$\begin{aligned} \overline{Y}^1_1 &= Y^1_1 + \alpha Z^2 + \beta Z^3, \\ \overline{Y}^2_1 &= Y^2_1 + c_3 Z^1 + a_2 Z^2 + a_3 Z^3, \\ \overline{Y}^3_1 &= Y^3_1 - c_2 Z^1 + b_2 Z^2 + b_3 Z^3 \end{aligned}$$

с произвольными α, β тотчас дает

$$[\bar{Y}_1^1, \bar{Y}_1^2] = \bar{Y}_1^2 + a_1 Z^1,$$
$$[\bar{Y}_1^1, \bar{Y}_1^3] = \bar{Y}_1^3 + b_1 Z^1,$$
$$[\bar{Y}_1^2, \bar{Y}_1^3] = c_1 Z^1,$$

а из тождества Якоби

$$[[\bar{Y}_1^1, \bar{Y}_1^2], \bar{Y}_1^3] + [[\bar{Y}_1^2, \bar{Y}_1^3], \bar{Y}_1^1] + [[\bar{Y}_1^3, \bar{Y}_1^1], \bar{Y}_1^2] = 0,$$

которое мы будем записывать короче

$$[\bar{Y}_1^1, \bar{Y}_1^2, \bar{Y}_1^3] = 0,$$

следует

$$a_1 = b_1 = c_1 = 0,$$

так что операторы Y_i^k нормированы по строкам. Обратимся теперь к преобразованию диагональных элементов:

$$\bar{Y}_1^1 = Y_1^1 + \alpha^1 Z^2 + \beta^1 Z^3,$$
$$\bar{Y}_2^2 = Y_2^2 + \alpha^2 Z^1 + \beta^2 Z^3,$$
$$\bar{Y}_3^3 = Y_3^3 + \alpha^3 Z^1 + \beta^3 Z^2,$$

и распорядимся произвольными коэфициентами α, β так, чтобы эти операторы были нормированы между собой. С помощью тождества

$$[\bar{Y}_1^1, \bar{Y}_2^2, \bar{Y}_3^3] = 0$$

это оказывается возможным и дает нам

$$[\bar{Y}_i^i, \bar{Y}_k^k] = 0.$$

В самом деле, если

$$[Y_1^1, Y_2^2] = a_\alpha Z^\alpha, \quad [Y_1^1, Y_3^3] = b_\alpha Z^\alpha, \quad [Y_2^2, Y_3^3] = c_\alpha Z^\alpha,$$

то пусть

$$\alpha^1 = a_2, \quad \beta^1 = b_3, \quad \alpha^2 = -a_2, \quad \beta^2 = c_3, \quad \alpha^3 = -b_1, \quad \beta^3 = -c_2.$$

Тогда

$$[\bar{Y}_1^1, \bar{Y}_2^2] = a_3 Z^3, \quad [\bar{Y}_1^1, \bar{Y}_3^3] = b_2 Z^2, \quad [\bar{Y}_2^2, \bar{Y}_3^3] = c_1 Z^1,$$

а из тождества Якоби $a_3 = b_2 = c_1 = 0$, и, таким образом, диагональные элементы нормированы. Более того, при этом удовлетворяются также и соотношения

$$[\bar{Y}_i^k, \bar{Y}_l^l] = \delta_l^k Y_i^l - \delta_i^l Y_l^k.$$

Действительно, пусть $k \neq l$ и

$$[\bar{Y}_i^k, \bar{Y}_k^k] = \bar{Y}_i^k + a_\alpha Z^\alpha, \quad [\bar{Y}_i^k, \bar{Y}_l^l] = b_\alpha Z^\alpha.$$

Тогда из тождества $[\bar{Y}_i^k, \bar{Y}_i^i, \bar{Y}_k^k] = 0$ имеем $a_\alpha = 0$ $(\alpha \neq i)$, а из тождества $[\bar{Y}_i^k, \bar{Y}_i^l, \bar{Y}_k^k] = 0$, принимая во внимание, что $[\bar{Y}_i^l, \bar{Y}_i^k] = 0$, имеем $a_i = 0$; наконец, из тождеств $[\bar{Y}_i^k, \bar{Y}_i^i, \bar{Y}_l^l] = 0$ и $[\bar{Y}_i^k, \bar{Y}_k^k, \bar{Y}_l^l] = 0$ получаем $b_\alpha = 0$.

Теперь уже легко доказать, что таблица (15) нашим строчно-диагональным процессом вполне нормирована. Именно, если

$$[\overline{Y}_i^k,\ \overline{Y}_l^m] = \delta_l^k \overline{Y}_i^m - \delta_i^m \overline{Y}_l^k + a_{ila}^{km} Z^a,$$

то три тождества Якоби относительно трех диагональных элементов тотчас дают $a_{ila}^{km} = 0$.

Нормируем теперь формулы

$$[X_i,\ Z^k] = \overline{Y}_i^k + \delta_i^k \overline{Y}_\alpha^\alpha + a_{i\alpha}^k Z^\alpha.$$

Для этого полагаем

$$\overline{X}_i = x^l - a_{i\alpha}^\beta \overline{Y}_\beta^\alpha$$

и получаем немедленно

$$[\overline{X}_i,\ Z^k] = \overline{Y}_i^k + \delta_i^k \overline{Y}_\alpha^\alpha.$$

Переходим к следующей группе формул:

$$[\overline{X}_i,\ \overline{Y}_l^k] = \delta_i^k \overline{X}_l + b_{ila}^{k\beta} \overline{Y}_\beta^\alpha + a_{ila}^k Z^\alpha.$$

В результате процесса предшествующего нормирования мы имеем уже $b_{ila}^{k\beta} = 0$. Чтобы убедиться в этом, достаточно выписать три тождества Якоби

$$[\overline{X}_i\ \overline{Y}_l^k,\ Z^s] = 0 \quad (s = 1,\ 2,\ 3).$$

Таким образом

$$[\overline{X}_i,\ \overline{Y}_l^k] = \delta_i^k \overline{X}_l + a_{ila}^k Z^\alpha.$$

Мы снова обращаемся к таблице (15) и нормируем $\overline{X}_i$ при помощи Z^α (что в силу коммутативности Z-ов не влияет на результат предыдущего нормирования) относительно ее диагональных элементов. Именно, пусть

$$\overline{\overline{X}}_i = \overline{X}_i + a_{i\alpha\alpha}^\alpha Z^\alpha.$$

Возвращаясь для удобства к прежним обозначениям, получим

$$[X_i,\ Y_k^k] = \delta_i^k X_k + a_{ik\alpha}^k Z^\alpha,$$

причем $a_{ikk}^k = 0$, а тогда в силу тех же тождеств Якоби вообще $a_{ik\alpha}^k = 0$.

Таким образом таблицы (15) нормированы относительно диагональных элементов. Отсюда следует, совершенно так же, как и ранее, что они нормированы и относительно прочих элементов таблицы, т. е. что вообще $a_{ikl}^m = 0$ и

$$[X_i,\ Y_k^l] = \delta_i^l X_k.$$

Последняя группа формул (14) нормируется при этом автоматически. Именно, если

$$[X_i,\ X_\alpha] = b_{ik\alpha}^\beta Y_\beta^\alpha + a_{ik\alpha} Z^\alpha,$$

то из тождеств

$$[X_i,\ X_k,\ Z^l] = 0, \quad [X_i,\ X_k,\ Y_m^l] = 0$$

следует

$$b_{ik\alpha}^l = 0, \quad a_{ikm} = 0,$$

и процесс нормирования закончен.

Чтобы окончательно привести операторы группы к виду (11), выбираем за новые переменные $\bar{x}^i$ решения систем

$$X_1(F)=1, \quad X_2(F)=0, \quad X_3(F)=0;$$
$$X_1(F)=0, \quad X_2(F)=1, \quad X_3(F)=0;$$
$$X_1(F)=0, \quad X_2(F)=0, \quad X_3(F)=1.$$

Тогда операторы X_i примут вид

$$X_i=\frac{\partial}{\partial \bar{x}^i},$$

или, возвращаясь к старым обозначениям,

$$X_i=p_i,$$

причем в силу уравнений (12) остальные операторы примут вид (11), в чем легко убедиться.

Аналогичными операциями можно добиться нормирования операторов группы типа 6. Не приводя всех деталей утомительного подсчета, ограничимся указанием основных его моментов. Пусть операторы группы будут

$$X_i=p_i+\ldots,$$
$$Y_1=x^1p_1-x^3p_3+\ldots, \quad Y_2=x^1p_2+x^2p_3+\ldots,$$
$$Y_3=x^2p_1+x^3p_2+\ldots, \quad Y_4=x^1p_1+x^2p_2+x^3p_3+\ldots,$$
$$Z_1=2(x^1)^2p_1+2x^1x^2p_2+(x^2)^2p_3+\ldots,$$
$$Z_2=(x^2)^2p_1+2x^2x^3p_2+2(x^3)^2p_3+\ldots,$$
$$Z_3=2x^1x^2p_1+(2x^1x^3+(x^2)^2)p_2+2x^2x^3p_3+\ldots$$

Структурные их формулы должны иметь такой вид:

I. $[Z_i, Z_k]=0.$

II. $[Y_1, Z_1]=Z_1, \quad [Y_2, Z_1]=0, \quad [Y_3, Z_1]=Z_3,$
$[Y_1, Z_2]=-Z_2, \quad [Y_2, Z_2]=Z_3, \quad [Y_3, Z_2]=0,$
$[Y_1, Z_3]=0, \quad [Y_2, Z_3]=Z_1, \quad [Y_3, Z_3]=Z_2,$
$[Y_4, Z_i]=Z_i.$

III. $[Y_1, Y_2]=Y_2, \quad [Y_2, Y_3]=Y_1, \quad [Y_3, Y_1]=Y_3,$
$[Y_i, Y_4]=0.$

IV. $[X_1, Z_1]=2(Y_1+Y_4), \quad [X_2, Z_1]=2Y_2, \quad [X_3, Z_1]=0,$
$[X_1, Z_2]=0, \quad [X_2, Z_2]=2Y_3, \quad [X_3, Z_2]=2(Y_4-Y_1),$
$[X_1, Z_3]=2Y_3, \quad [X_2, Z_3]=2Y_4, \quad [X_3, Z_3]=2Y_3.$

V. $[X_1, Y_1]=X_1, \quad [X_2, Y_1]=0, \quad [X_3, Y_1]=-X_3,$
$[X_1, Y_2]=X_2, \quad [X_2, Y_2]=X_3, \quad [X_3, Y_2]=0,$
$[X_1, Y_3]=0, \quad [X_2, Y_3]=X_1, \quad [X_3, Y_3]=X_2,$
$[X_i, Y_4]=X_i.$

VI. $[X_i, X_k]=0.$

Нормированию подлежат только группы III—VI, где может внести изменения наличие операторов высшего порядка. Но придавая к Y_i линей-

ные комбинации Z_i, мы в силу $[Y_4, Z_i]=Z_i$ добьемся нормирования второй строки группы III, а тогда будут нормированы и формулы первой строки (написать тождество Якоби с Y_4). Формулы группы IV нормируются одновременно с четвертой строкой группы V по столбцам. Пусть, например,

$$[X_1, Z_1]=2(Y_1+Y_4)+a_1Z_1+a_2Z_2+a_3Z_3,$$
$$[X_1, Z_2]=b_1Z_1+b_2Z_2+b_3Z_3,$$
$$[X_1, Z_3]=2Y_3+c_1Z_1+c_2Z_2+c_3Z_3, \quad [X_1, Y_4]=X_1+a^\alpha Y_\alpha+b^\alpha Z_\alpha.$$

Нормируя X_1 при помощи Z_i, добьемся уничтожения b^α; затем, придавая к X_1 линейные комбинации Y_i (что не влияет на результат предыдущего нормирования в силу коммутативности Y_i и Y_4), уничтожим a_1, a_3, c_2 и c_3. Тогда тождества Якоби $[X_1, \overline{X}_i, Y_4]=0$ покажут нам, что обращаются в нуль не только a_2, c_1, b_i, но также и a^α. Далее, группа V оказывается нормированной полностью — об этом говорят нам тождества

$$[X_i, Y_k, Y_4]=0.$$

Нетрудно убедиться в том, что нормированной окажется и группа VI.

Группа типа 5 нормируется таким же образом, благодаря наличию в ней оператора Y_4. Иначе обстоит дело с группами типа 4, ибо, как оказывается, здесь структура группы не определяется полностью укороченными операторами. Именно, оказывается возможным добиться нормирования для скобок $[X_i, Y_k]$; однако альтернаторы операторов нулевого порядка не уничтожаются, а приводятся к виду

$$[X_1, X_2]=-\alpha X_1,$$
$$[X_2, X_3]=-\alpha X_3,$$
$$[X_3, X_1]=\alpha X_2.$$

Если $\alpha=0$, то мы просто имеем дело с подгруппой группы типа 6, если же $\alpha\neq 0$, то (производя изменение масштабов по координатным осям) мы можем положить $\alpha=1$. Произведя после этого преобразование операторов

$$\overline{X}_2=X_2-Y_1, \quad \overline{X}_3=X_3-Y_2,$$

мы получим группу со структурой

$$[X_1, X_2]=0, \quad [X_1, Y_1]=X_1, \quad [X_2, Y_1]=0, \quad [X_3, Y_1]=-X_3,$$
$$[X_2, X_3]=-X_3, \quad [X_1, Y_2]=X_2+Y_1, \quad [X_2, Y_2]=X_3, \quad [X_3, Y_2]=0,$$
$$[X_3, X_1]=0, \quad [X_1, Y_3]=0, \quad [X_2, Y_3]=X_1+Y_3, \quad [X_3, Y_3]=X_2$$

(альтернаторы операторов первого порядка остаются те же), инфинитезимальные операторы которой получаются в следующей форме:

$$X_1=p_1-\frac{1}{2}x^3p_2, \quad X_2=p_2+x^1p_2+x^3p_3, \quad X_3=p_3-\frac{1}{2}x^1p_2,$$
$$Y_1=x^1p_1-x^3p_3,$$
$$Y_2=x^1p_2+x^2p_3+\frac{1}{2}x^1(x^1p_1+x^2p_2+x^3p_3),$$

$$Y_3 = x^2 p_1 + x^3 p_2 + \frac{1}{2} x^3 (x^1 p_1 + x^2 p_2 + x^3 p_3).$$

Операторы типов 4—6 приведены здесь в форме, отличной от их формы Ли.

6. Заключение. Найденные результаты мы формулируем в виде следующей теоремы:

Существует всего семь типов примитивных групп в трех переменных. Типы эти следующие:

Тип 1 *(проективная группа)* — 15-го *порядка:*

$$p_i, \quad x^i p_k, \quad x^i x^\alpha p_\alpha.$$

Тип 2 *(общая аффинная группа)* — 12-го *порядка:*

$$p_i, \quad x^i p_k.$$

Тип 3 *(унимодулярная группа)* — 11-го *порядка:*

$$p_i, \quad x^i p_k \ (i \neq k),$$
$$x^1 p_1 - x^3 p_3, \quad x^2 p_2 - x^3 p_3.$$

Тип 4 — 10-го *порядка:*

$$p_i, \quad x^1 p_2 + x^2 p_3, \quad x^2 p_1 + x^3 p_2, \quad x^1 p_1 - x^3 p_3, \quad x^\alpha p_\alpha,$$
$$2 (x^1)^2 p_1 + 2 x^1 x^2 p_2 + (x^2)^2 p_3, \quad (x^2)^2 p_1 + 2 x^2 x^3 p_2 + 2 (x^3)^2 p_3,$$
$$2 x^1 x^2 p_1 + (2 x^1 x^3 + (x^2)^2) p_2 + 2 x^2 x^3 p_3$$

(группа эта подобна проективной группе общего линейного комплекса).

Тип 5—7-го *порядка:*

$$p_i, \quad x^1 p_2 + x^2 p_3, \quad x^2 p_1 + x^3 p_2, \quad x^1 p_1 - x^3 p_3, \quad x^\alpha p_\alpha.$$

Тип 6 — 6-го *порядка:*

$$p_i, \quad x^1 p_2 + x^2 p_3, \quad x^2 p_1 + x^3 p_2, \quad x^1 p_1 - x^3 p_3$$

(группа, подобная группе движений в евклидовом пространстве).

Тип 7 — 6-го *порядка:*

$$p_1 - \frac{1}{2} x^3 p_2, \quad p_2 + x^2 p_2 + x^3 p_3, \quad p_3 - \frac{1}{2} x^1 p_2,$$
$$x^1 p_1 - x^3 p_3,$$
$$x^1 p_2 + x^2 p_3 + \frac{1}{2} x^1 x^\alpha p_\alpha, \quad x^2 p_1 + x^3 p_2 + \frac{1}{2} x^3 x^\alpha p_\alpha$$

(группа, подобная группе движений в неевклидовом пространстве).

SUR LA CONVERGENCE ET L'ESTIMATION DES ERREURS DANS QUELQUES PROCÉDÉS DE RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS NUMÉRIQUES.

Par M. Alexandre Ostrowski à Bâle.

Introduction. Un procédé, très remarquable sous plusieurs rapports, de résolution des équations numériques, dû à M. de Misès, a été publié[1]) il y a quelques années. On considère l'équation

$$f(x)=0 \tag{1}$$

dans l'intervalle $[A, B]$, où $f(x)$ est continue. En désignant par c un nombre positif plus petit que

$$\frac{1}{\operatorname{Max}\left|\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\right|}, \tag{2}$$

on part d'un nombre x_1, $x_1 \varepsilon [A, B]$, en posant successivement

$x_2=x_1+cf(x_1)$, $x_3=x_2+cf(x_2)$, ..., $x_{n+1}=x_n+cf(x_n)$, ...

Alors, s'il y a pour $f(x_1)>0$ des racines de (1) dans l'intervalle (x_1, B), la suite x_ν converge vers la plus petite de ces racines. Sinon, x_n atteint pour un certain n une valeur $>B$.

De même, pour $f(x_1)<0$, s'il y a des racines de (1) entre A et x_1, la suite x_ν converge vers la plus grande de ces racines, sinon, un x_n est plus petit que A.

Comme on le voit, ce procédé n'est assujetti qu'à une seule condition, à savoir que

$$\left|\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\right|$$

est borné dans l'intervalle $[A, B]$. Dans ce qui suit nous allons d'abord étudier la rapidité de la convergence de ce procédé.

---

[1]) Dans le mémoire de R. de Misès et H. Pollaczek-Geiringer, Praktische Verfahren der Gleichungsauflösung, Ztschr. f. angew. Math. u. Mechanik, t. 9 (1929), pp. 58—62. Quelques points essentiels de cette méthode reviennent à M. Bauer et L. Fejér. Cf. M. Bauer, Zur Bestimmung der reellen Wurzeln einer algebraischen Gleichung durch Iteration, Jahresbericht d. Deutschen Mathematiker-Vereinigung, t. 25 (1916), pp. 294—301. Je dois la connaissance de ce dernier mémoire à une aimable communication de M. N. Tschebotareff, qui m'est parvenue pendant l'impression.

Dans le cas où la suite x_ν converge vers une racine ζ de (1), et que $f'(\zeta)$ existe et est différent de zéro, nous allons démontrer (Théorème II), que l'on a pour $\nu \longrightarrow \infty$

$$\frac{\zeta - x_{\nu+1}}{\zeta - x_\nu} \longrightarrow 1 - cf'(\zeta)\ ^{2}). \tag{3}$$

Donc, dans ce cas, le nombre de décimales exactes de x_ν est proportionnel à ν, la convergence est *linéaire*.

Il est à remarquer que le procédé en question converge aussi si c est *égal* à (2). Dans ce cas, si en particulier on a $cf'(\zeta) = 1$, la convergence est plus rapide. On a alors, si $f''(\zeta)$ existe,

$$\frac{\zeta - x_{\nu+1}}{(\zeta - x_\nu)^2} \longrightarrow -\frac{1}{2}\frac{f''(\zeta)}{f'(\zeta)}, \tag{4}$$

c'est-à-dire, que la convergence est au moins aussi bonne que par le procédé de Newton.

Pour les relations (3) et (4) il est nécessaire que $f'(\zeta) \neq 0$. La convergence devient sensiblement plus faible, si ζ est une racine multiple. Nous allons montrer (Théorème III) que, si pour un $\alpha > 0$

$$\left|\frac{f(x)}{(\zeta - x)^{1+\alpha}}\right| \longrightarrow k, \tag{5}$$

on a pour $\nu \longrightarrow \infty$

$$\nu^{1/\alpha}\,|\,\zeta - x_\nu\,| \longrightarrow \frac{1}{(kc\alpha)^{1/\alpha}}. \tag{6}$$

Dans le cas le plus général nous pourrons du moins donner des estimations de $\zeta - x_\nu$ en fonction de $x_\nu - x_{\nu-1}$ suffisantes pour le calcul pratique.

La deuxième partie de notre mémoire s'occupe du procédé de Newton et de quelques modifications de ce procédé. Dans le procédé de Newton on forme, en partant de x_0, la suite des nombres

$$x_{\nu+1} = x_\nu - \frac{f(x_\nu)}{f'(x_\nu)}.$$

La convergence de ce procédé vers une racine de $f(x)$ est en général très rapide — „quadratique". Tout de même, comme les x_ν restent en général d'un seul côté de la racine cherchée ζ, il y a lieu d'essayer d'enfermer ζ entre *deux* suites convergentes. Or, à cet effet, il est tout à fait superflu de combiner le procédé de Newton avec la méthode de fausse position („*regula falsi*") ou avec une méthode proposée par Fourier. En effet, l'application de ces méthodes exige un travail calculatoire assez considérable, tandis que l'on peut trouver directement des limites de l'erreur $|\zeta - x_\nu|$ très précises et très faciles à calculer. (Cf. la formule (5,9) au numéro 5.) En vérité, une évaluation bien précise de cette sorte a été déjà donnée par Cauchy (1829) dans une note trop peu connue [3]). Nous don-

---

[2]) Cf. le mémoire de M. Bauer cité plus haut, p. 299—300.

[3]) Cauchy, „Leçons sur le calcul différentiel", Paris 1829 (Note sur la détermination approximative des racines d'une équation algébrique ou transcendante), réimprimé dans les Oeuvres complètes (II), t. 4, p. 573—609.

nons un résultat (Théorèmes V, VI) plus précis et surtout plus commode pour la pratique et nous l'étendons ensuite au cas d'une variable complexe (Théorème VII).

On a essayé de simplifier le procédé de Newton en remplaçant $f'(x_\nu)$ dans les dénominateurs par $f'(x_0)$, et l'on trouve même parfois dans les traités l'affirmation que le procédé de Newton ainsi simplifié converge avec la même rapidité que le procédé original. Notre théorème VIII contient des conditions assez générales pour la convergence du „procédé simplifié", ainsi que quelques résultats sur sa convergence, dont il suit qu'elle est beaucoup moins rapide que celle du procédé original. Tout de même nous montrons dans le dernier numéro 10 du mémoire que l'on parvient à un procédé dont la convergence est en général même plus rapide que celle du procédé de Newton, — relativement au travail calculatoire dépensé, — si l'on ne calcule les dénominateurs $f'(x_\nu)$ qu'à chaque deuxième opération. Ce dernier résultat repose toutefois sur l'introduction *d'une unité du travail calculatoire*, — nous l'appelons un *Horner* — qui est fort conventionnelle et ne peut être utilisée que dans des conditions assez restrictives.

1. Soit $f(x)$ une fonction continue dans l'intervalle (fermé) $J=[A, B]$. Soit

$$M = \sup_{x', x'' \in J} \left| \frac{f(x') - f(x'')}{x' - x''} \right| \tag{1,1}$$

fini [4]) et

$$0 < c \leqq \frac{1}{M}. \tag{1,2}$$

Soit x_1 un nombre de l'intervalle J. Supposons, pour fixer les idées, que $f(x_1) > 0$. (Si $f(x_1) < 0$, il suffit de multiplier l'équation (1) par -1.)

Posons

$$x_2 = x_1 + cf(x_1), \ldots, \quad x_{\nu+1} = x_\nu + cf(x_\nu), \ldots, \tag{1,3}$$

tant que x_ν ne sorte pas de l'intervalle J. Alors on a $x_2 > x_1$, et $f(x)$ est certainement positive dans la partie de l'intervalle ouvert (x_1, x_2), contenue dans J. Car, si pour un x_0 avec $x_1 < x_0 \leqq x_2$, $f(x_0) = 0$, on a

$$\left| \frac{x_1 - x_0}{f(x_1) - f(x_0)} \right| \leqq \left| \frac{x_2 - x_1}{f(x_1)} \right| = c, \quad c \geqq \frac{1}{M}.$$

Donc, d'après (1,1) et (1,2), on a $x_0 = x_2$,

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_1)}{x_2 - x_1} = M. \tag{1,4}$$

D'autre part, on a pour tout couple de nombres ξ, η avec $x_1 \leqq \xi < \eta \leqq x_2$

$$\frac{f(\xi) - f(\eta)}{\xi - \eta} \leqq M.$$

---

[4]) Par le symbole sup on désigne suivant M. Hausdorff la borne supérieure exacte. De même inf désigne la borne inférieure exacte.

Supposons qu'on ait pour un couple de nombres ξ, η avec $x_1 \leqq \xi < \eta \leqq x_2$

$$f(\xi) - f(\eta) < M(\xi - \eta).$$

On a certainement

$$f(x_1) - f(\xi) \leqq M(\xi - x_1),$$
$$f(\eta) - f(x_2) \leqq M(x_2 - \eta);$$

de ces trois inégalités il suit que

$$f(x_1) = f(x_1) - f(x_2) < M(x_2 - x_1)$$

contrairement à (1,4), donc on a pour $x_1 \leqq x \leqq x_2$

$$f(x) = f(x_1) - M(x - x_1). \tag{1,5}$$

Pour $f(x_2) = 0$ on a évidemment $x_2 = x_3 = \ldots$ Pour $f(x_2) \neq 0$, les mêmes considérations peuvent être appliquées à x_2, x_3, etc. Donc, si aucun des x_ν ne sort de J, on a $x_\nu \uparrow \zeta$, $f(x_\nu) \longrightarrow f(\zeta)$, et d'après (1,3),

$$\zeta = \zeta + cf(\zeta), \quad f(\zeta) = 0,$$

tandis que dans l'intervalle (x, ζ) $f(x)$ est positive.

Des considérations analogues s'appliquent au procédé

$$x_2 = x_1 - cf(x_1), \quad x_3 = x_2 - cf(x_2), \quad \ldots, \quad x_{\nu+1} = x_\nu - cf(x_\nu), \quad \ldots \tag{1,6}$$

tant que x_ν ne sort pas de l'intervalle J. (On réduit (1,6) à (1,3) en prenant dans (1,3) c négatif.) Donc:

1. *Si dans le procédé de M. de Misès* $f(x_1) > 0$ *et tous les nombres* x_ν *définis par* (1,3) *restent* $\leqq B$, *la suite* x_ν *converge en montant vers une limite* ζ, *et* ζ *est la plus petite racine de* (1) *contenue dans* $(x_1, B]$. *Si pour un* ν, $x_\nu = \zeta$, *on a* $c = M$,

$$f(x) = f(x_{\nu-1}) - M(x - x_{\nu-1}), \quad x_\nu \geqq x \geqq x_{\nu-1}. \tag{1,7}$$

Si $f(x_1) > 0$ *et tous les nombres* x_ν *définis par* (1,6) *restent* $\geqq A$, *la suite* x_ν *converge en descendant vers une limite* ζ, *qui est la plus grande racine de* (1) *contenue dans* $[A, x_1)$. *Si pour un* ν, $x_\nu = \zeta$, *on a*

$$c = M, \quad f(x) = f(x_{\nu-1}) + M(x - x_{\nu-1}), \quad x_\nu \leqq x \leqq x_{\nu-1}\ ^{5}). \tag{1,8}$$

2. On peut se borner à la considération de la suite (1,3). En utilisant cette suite, il suffit de définir M comme

$$\sup_{x', x'' \in [x_1, B]} \left| \frac{f(x') - f(x'')}{x' - x''} \right|. \tag{2,1}$$

Dans ce qui suit, nous supposons qu'on a toujours $x_\nu < \zeta$, $\nu = 1, 2, \ldots$, et que $f(x_1) > 0$. Posons

$$\rho_\nu = \frac{f(x_\nu)}{\zeta - x_\nu} = \frac{f(x_\nu) - f(\zeta)}{\zeta - x_\nu}. \tag{2,2}$$

---

5) La démonstration de la convergence du procédé de M. de Misès donnée dans le mémoire cité suppose qu'on ait $c < \frac{1}{M}$.

On a évidemment $\rho_\nu > 0$ et d'après (1,3)

$$\frac{x_{\nu+1}-x_\nu}{\zeta-x_\nu}=c\rho_\nu,\quad \zeta-x_\nu=\frac{f(x_\nu)}{\rho_\nu}=\frac{x_{\nu+1}-x_\nu}{c\rho_\nu}, \tag{2,3}$$

$$\frac{\zeta-x_{\nu+1}}{\zeta-x_\nu}=1-c\rho_\nu, \tag{2,4}$$

$$\frac{\zeta-x_n}{\zeta-x_1}=\prod_{\nu=1}^{n-1}(1-c\rho_\nu). \tag{2,5}$$

Supposons d'abord que dans l'intervalle $[x_1, B]$ la borne inférieure

$$\inf_{x',\,x''\,\in\,[x_1,\,B]}\left|\frac{f(x')-f(x'')}{x'-x''}\right|=m$$

soit positive. Alors on a $\frac{1}{c}\geqq M\geqq\rho_\nu\geqq m$, donc d'après (2,2) — (2,4)

$$\frac{1}{m}\geqq\frac{\zeta-x_\nu}{f(x_\nu)}\geqq\frac{1}{M}\geqq c, \tag{2,6}$$

$$\frac{1}{cM}-1\leqq\frac{\zeta-x_\nu}{x_\nu-x_{\nu-1}}\leqq\frac{1}{cm}-1, \tag{2,7}$$

$$1-cM\leqq\frac{\zeta-x_{\nu+1}}{\zeta-x_\nu}\leqq 1-cm. \tag{2,8}$$

Appliquons ces formules à l'exemple suivant:

$$f(x)=x^4-3x^3-x^2+x+6=0,$$

$A=1,\ B=2, M=8{,}856\ldots,\ m=6,\ c=\frac{1}{10},\ \zeta=1{,}521379\ldots;$

$$\begin{array}{lll} x_1=1; & \zeta-x_1=0{,}521; & f(x_1)=4;\\ x_2=1{,}4; & \zeta-x_2=0{,}121; & f(x_2)=1{,}050;\\ x_3=1{,}505; & \zeta-x_3=0{,}016; & f(x_3)=0{,}144;\\ x_4=1{,}519; & \zeta-x_4=0{,}002; & f(x_4)=0{,}020;\\ x_5=1{,}521; & \zeta-x_5=0{,}000; & f(x_5)=0{,}004; \end{array}$$

$$\frac{\zeta-x_1}{f(x_1)}=0{,}130,\quad \frac{\zeta-x_2}{f(x_2)}=0{,}12,\quad \frac{\zeta-x_3}{f(x_3)}=0{,}11,\quad \frac{\zeta-x_4}{f(x_4)}=0{,}1,\quad \ldots$$

Ces quotients sont en effet contenus entre $\frac{1}{m}=0{,}166\ldots$ et $c=0{,}1$. De même les quotients

$$\frac{\zeta-x_2}{x_2-x_1}=0{,}302,\quad \frac{\zeta-x_3}{x_3-x_2}=0{,}152,\quad \frac{\zeta-x_4}{x_4-x_3}=0{,}143$$

sont contenus entre $\frac{1}{cM}-1=0{,}13\ldots$ et $\frac{1}{cm}-1=0{,}66\ldots$

Enfin les nombres

$$\frac{\zeta-x_2}{\zeta-x_1}=0{,}23,\quad \frac{\zeta-x_3}{\zeta-x_2}=0{,}13,\quad \frac{\zeta-x_4}{\zeta-x_3}=0{,}12$$

sont contenus entre $1-cM=0{,}114$ et $1-cm=0{,}4$.

Dans cet exemple, le calcul des nombres M et m est particulièrement direct — il s'agit de trouver le maximum et le minimum de $|f'(x)|$ dans l'intervalle $[1, 2]$. Il est à peine nécessaire de dire que toujours, quand la fonction $f(x)$ est dérivable dans l'intervalle $[A, B]$, il suffit d'évaluer le maximum et le minimum de $|f'(x)|$ dans l'intervalle considéré, pour avoir les valeurs exactes de M et m.

3. Nous abandonnons maintenant l'hypothèse $m > 0$. Supposons que $f'(\zeta)$ existe. Alors on a évidemment

$$\rho_\nu \longrightarrow -f'(\zeta). \tag{3,1}$$

Donc d'après (2,3) et (2,4):

II. *Si, dans les hypothèses du théorème* I, $f'(\zeta)$ *existe et est différent de* 0, *on a*

$$\frac{\zeta - x_{\nu+1}}{\zeta - x_\nu} \longrightarrow 1 - c|f'(\zeta)|, \quad \frac{\zeta - x_{\nu+1}}{x_{\nu+1} - x_\nu} \longrightarrow \frac{1}{c|f'(\zeta)|} - 1. \tag{3,2}$$

Enfin supposons que l'on ait

$$\frac{1}{c} = M = |f'(\zeta)| \neq 0, \quad M = -f'(\zeta), \tag{3,3}$$

que $f'(x)$ existe dans le voisinage à gauche de ζ et que $f''(\zeta)$ existe.

Alors on a d'après (1,3)

$$\zeta - x_{\nu+1} = \zeta - x_\nu + \frac{1}{f'(\zeta)} f(x_\nu),$$

$$f'(\zeta)(\zeta - x_{\nu+1}) = f(x_\nu) - [f(\zeta) + f'(\zeta)(x_\nu - \zeta)].$$

Or, en posant ici pour l'expression de droite $(x_\nu - \zeta)^2 \mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}$ converge vers $\frac{f''(\zeta)}{2}$[6]). Donc, on a dans ce cas

$$\frac{\zeta - x_{\nu+1}}{(\zeta - x_\nu)^2} \longrightarrow \frac{1}{2} \frac{f''(\zeta)}{f'(\zeta)}, \tag{3,4}$$

c'est-à-dire, la rapidité de la convergence correspondant à celle du procédé de Newton[7]). Cependant, cette valeur de c n'est utilisable que si l'on connait la valeur de la dérivée en l'endroit cherché, ce qui est évidemment bien rare.

Remplaçons maintenant l'hypothèse du théorème II par

$$\frac{|f(x)|}{|\zeta - x|^{1+\alpha}} \longrightarrow k, \quad x \uparrow \zeta, \quad \alpha > 0, \quad k > 0. \tag{3,5}$$

Posons

$$k|\zeta - x_\nu|^\alpha = q_\nu. \tag{3,6}$$

---

[6]) Cf. par exemple De la Vallée Poussin, „Cours d'analyse infinitésimale", 3. éd., t. I (1914), pp. 108—109.

[7]) Nous étudions la rapidité de la convergence du procédé de Newton dans le No. 4.

On a d'après (2,2) et (2,4) pour $\nu \to \infty$

(3,7) $$\rho_\nu \sim q_\nu, \quad \rho_\nu \to 0,$$

$$q_{\nu+1} = q_\nu (1 - c\rho_\nu)^\alpha, \quad q_{\nu+1} \sim q_\nu \sim \rho_\nu,$$

$$q_{\nu+1} - q_\nu = q_\nu [(1 - c\rho_\nu)^\alpha - 1] = -q_\nu [\alpha c \rho_\nu + O(\rho_\nu^2)],$$

(3,8) $$d_\nu = \frac{1}{q_{\nu+1}} - \frac{1}{q_\nu} = -\frac{q_{\nu+1} - q_\nu}{q_\nu q_{\nu+1}} = \frac{\alpha c \rho_\nu}{q_{\nu+1}} [1 + O(\rho_\nu)] \to \alpha c.$$

Or

$$\frac{1}{q_n} = \frac{1}{q_1} + \sum_{\nu=1}^{n-1} d_\nu,$$

donc d'après (3,8)

$$\frac{1}{n} \frac{1}{q_n} \to \alpha c, \quad n q_n \to \frac{1}{\alpha c},$$

et d'après (3,6)

(3,9) $$\nu^{1/\alpha} |\zeta - x_\nu| \to \frac{1}{(k\alpha c)^{1/\alpha}}.$$

III. *Si dans les hypothèses du théorème* I, *pour un* $\alpha > 0$ *et un* $k > 0$,

(3,91) $$\frac{|f(x)|}{|\zeta - x|^{1+\alpha}} \to k, \quad x \to \zeta,$$

on a

(3,92) $$|\zeta - x_\nu| \sim \frac{1}{(k\alpha c \nu)^{1/\alpha}}.$$

Pour $\alpha = 1$, on a une racine double et

(3,93) $$\nu |\zeta - x_\nu| \to \frac{1}{kc}.$$

4. Dans le procédé de Newton on établit, en partant d'une valeur x_0, la suite suivante

(4,1) $$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}, \; x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}, \; \ldots, \; x_{\nu+1} = x_\nu - \frac{f(x_\nu)}{f'(x_\nu)}, \; \ldots$$

L'application de ce procédé suppose donc dans tous les cas que $f'(x)$ existe et est différente de 0 aux points consécutifs x_ν.

Le premier énoncé des conditions suffisantes pour la convergence du procédé de Newton est dû à Fourier.

Conditions de Fourier: on suppose $f(x)$ continue ainsi que sa dérivée première $f'(x)$ et douée d'une dérivée seconde $f''(x)$ dans l'intervalle fermé J de x_0 à b $(x_0 \leqq b)$. De plus, on suppose que $f''(x)$ ne change pas de signe dans J et que l'on a

(4,2) $$f(x_0) f''(x_0) > 0, \quad f(x_0) f(b) < 0$$ [8]).

IV. *Si les conditions de Fourier sont remplies,* $f(x)$ *possède une seule racine* ζ *à l'intérieur de l'intervalle* J, $f'(x)$ *reste différente de* 0 *entre* x_0 *et* ζ *et la suite* (4,1) *converge vers* ζ.

---

[8]) Dans ce qui suit nous appelons les conditions énoncées „conditions de Fourier" bien que les conditions données par Fourier (Analyse des équations déterminées, Paris 1831, livre 2, III, VI), ainsi que les conditions qu'on trouve généralement dans les traités d'algèbre soient un peu plus restrictives.

Démonstration. Supposons que $x_0 < b$. (Si $x_0 > b$, il suffit de changer le signe de la variable indépendante.) Supposons de plus que l'on ait dans J, $f''(x) \geqq 0$. (Si $f''(x)$ admet dans J des valeurs négatives, on multiplie $f(x)$ par -1.)

Alors on a, d'après (4,2), $f(x_0) > 0$, $f(b) < 0$. *Donc $f'(x_0)$ est négative*, car de $f'(x_0) \geqq 0$ il suit que $f'(x)$ reste non négative dans tout l'intervalle J et $f(x)$ ne pourrait devenir négative.

Soit ζ la plus petite racine de $f(x)$ dans J. *Alors $f'(x)$ reste négative dans l'intervalle* $[x_0, \zeta)$. Car, si l'on a

$$x_0 < \xi < \zeta, \quad f'(\xi) = 0$$

il s'ensuit que $f'(x)$ reste non négative pour $x > \xi$. Donc on aurait $f(x) \geqq f(\xi) > 0$ pour $x \geqq \xi$.

Si $f'(x)$ ne possède pas de racines dans J, il est clair que $f(x)$ n'a pas d'autres racines que ζ dans J. Or, supposons que $f'(x)$ devienne égale à 0 dans J, et soit $\eta \geqq \zeta$ le *dernier* point dans J où $f'(\eta) = 0$. Alors $f'(x)$ est non positive entre x_0 et η et non négative entre η et b. Donc $f(x)$ ne croit pas entre x_0 et η et ne décroit pas entre η et b. Donc les valeurs de $f(x)$ entre η et b sont négatives et *la fonction $f(x)$ ne change de signe qu'une fois entre x_0 et b.*

Maintenant on a évidemment $x_1 > x_0$, puisque $\frac{f(x_0)}{f'(x_0)} < 0$. De (4,1) on a

$$\frac{\zeta - x_1}{\zeta - x_0} = 1 - \frac{1}{f'(x_0)} \frac{f(\zeta) - f(x_0)}{\zeta - x_0} = 1 - \frac{f'(\xi)}{f'(x_0)}, \tag{4,3}$$

où ξ est situé entre x_0 et ζ (au sens étroit); d'autre part $f'(x_0) \leqq f'(\xi) < 0$. Donc $x_0 < x_1 \leqq \zeta$.

Si $x_1 = \zeta$, on a évidemment $\zeta = x_1 = x_2 = \ldots$ Si $x_1 < \zeta$, on peut appliquer le même raisonnement à x_1, etc. Donc on a en tout cas $x_0 \leqq x_1 \leqq x_2 \leqq \ldots \leqq \zeta$,

$$x_\nu \uparrow x' \leqq \zeta.$$

Il est aisé de voir qu'on a $x' = \zeta$, car autrement on aurait

$$x' < \zeta, \quad f(x_\nu) \to f(x'), \quad f'(x_\nu) \to f'(x') < 0,$$

$$x' = x' - \frac{f(x')}{f'(x')},$$

donc x' serait une racine dans J plus petite que ζ; le théorème IV est démontré.

Il n'est pas dépourvu d'intérêt de considérer le cas où un des nombres x_ν devient égal à ζ. Si c'est le cas de x_1, on a d'après (4,3)

$$f'(x_0) = \frac{f(\zeta) - f(x_0)}{\zeta - x_0} = \int_0^1 f'(x_0 + t(\zeta - x_0))\, dt.$$

Donc on a $f''(x) = 0$ dans un intervalle adjoint à ζ à gauche, et l'on voit aisément que cette condition est aussi suffisante pour qu'on ait $x_\nu = \zeta$ avec un $\nu \geqq 1$.

5. Considérons maintenant le cas plus général, dans lequel les conditions de Fourier ne sont plus nécessairement satisfaites.

Soit ζ une racine quelconque de l'équation $f(x)=0$. Supposons que $f(x)$ possède une dérivée continue dans l'intervalle $[x_0, \zeta]$ et que de plus:
ou bien
A) $f'(\zeta)$ *existe*,
ou bien
B) $f'(x)$ *existe dans l'intervalle* $[x_0, \zeta]$,
ou bien
C) $f'(x)$ *est continue dans l'intervalle* $[x_0, \zeta]$.
Alors je dis qu'on a dans l'hypothèse A):

$$(5,1) \quad -f'(x_0)(\zeta - x_1) = f(\zeta) - [f(x_0) + f'(x_0)(\zeta - x_0)] = \frac{1}{2} M (\zeta - x_0)^2,$$

où M tend vers $f'(\zeta)$ pour $x_0 \longrightarrow \zeta$;
dans l'hypothèse B):

$$(5,2) \quad -f'(x_0)(\zeta - x_1) = (\zeta - x_0)^2 \frac{1}{2} f''(\eta), \quad \eta \varepsilon (x_0, \zeta);$$

dans l'hypothèse C):

$$(5,3) \quad -f'(x_0)(\zeta - x_1) = \int_{x_0}^{\zeta} (\zeta - u) f''(u)\, du.$$

La formule (5,3) est immédiate. (5,2) est le reste de Lagrange pour la série de Taylor [9]). La démonstration que $M \longrightarrow f''(\zeta)$ dans (5,1) est un peu moins directe:
Posons $x_0 = \zeta - h$. Alors nous avons à démontrer

$$(5,4) \quad \frac{f(\zeta) - f(\zeta - h) - hf'(\zeta - h)}{h^2} \longrightarrow \frac{1}{2} f''(\zeta), \quad h \longrightarrow 0.$$

Or, l'expression de gauche est égale à

$$\int_0^1 \frac{f'(\zeta - th) - f'(\zeta)}{h}\, dt + \frac{f'(\zeta) - f'(\zeta - h)}{h},$$

où le deuxième terme converge vers $f''(\zeta)$ par définition. Quant à l'intégrale, on a évidemment

$$f'(\zeta - th) - f'(\zeta) = -th[f''(\zeta) + \varepsilon],$$

où ε est une fonction de t et de h, qui tend vers 0 avec h, *uniformément* pour $0 \leqslant t \leqslant 1$. Donc on a

$$\int_0^1 \frac{f'(\zeta - th) - f'(\zeta)}{h}\, dt = -\int_0^1 f''(\zeta)\, t\, dt - \int_0^1 \varepsilon t\, dt,$$

où la première intégrale de droite est égale à $-\frac{f''(\zeta)}{2}$, tandis que la seconde tend vers 0 avec h, et (5,4) est démontré.

---

[9]) Cf. De la Vallée Poussin, l. c., pp. 110, 111.

Supposons maintenant que la suite (4,1) *converge vers* ζ, *que* $f'(x)$ *soit continue dans un intervalle contenant* ζ *et chacun des* x_ν, $f'(\zeta) \neq 0$ *et que* $f''(\zeta)$ *existe.*

Alors il résulte de (5,1) en y écrivant x_ν pour x_0, $x_{\nu+1}$ pour x_1:

$$\frac{\zeta - x_{\nu+1}}{(\zeta - x_\nu)^2} \longrightarrow -\frac{1}{2}\frac{f''(\zeta)}{f'(\zeta)}, \quad \nu \longrightarrow \infty \text{ [10]}, \tag{5,5}$$

c'est-à-dire que la convergence de la suite de Newton est „quadratique".

En particulier, on a dans ce cas

$$\frac{\zeta - x_{\nu+1}}{\zeta - x_\nu} \longrightarrow 0, \quad \frac{x_{\nu+1} - x_\nu}{\zeta - x_\nu} \longrightarrow 1,$$

$$\frac{\zeta - x_{\nu+1}}{(x_{\nu+1} - x_\nu)^2} \longrightarrow -\frac{1}{2}\frac{f''(\zeta)}{f'(\zeta)}, \tag{5,51}$$

$$\frac{x_{\nu+1} - x_\nu}{(x_\nu - x_{\nu-1})^2} \longrightarrow -\frac{1}{2}\frac{f''(\zeta)}{f'(\zeta)}. \tag{5,52}$$

Une conséquence intéressante de (5,52) est que *la série*

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} |x_{\nu+1} - x_\nu|^\varepsilon$$

converge pour tout $\varepsilon > 0$.

Supposons maintenant que l'on ait dans l'hypothèse B) pour un $\alpha > 0$, $x \longrightarrow \zeta$

$$\frac{|f'(x)|}{|\zeta - x|^\alpha} \longrightarrow k > 0. \tag{5,6}$$

Si $\alpha \leqslant 1$, il résulte de (5,2), écrite pour x_ν et $x_{\nu+1}$ au lieu de x_0 et x_1:

$$|\zeta - x_{\nu+1}| \sim \frac{1}{2}\frac{|f''(\zeta)|}{k}|\zeta - x_\nu|^{2-\alpha},$$

$$\frac{|\zeta - x_{\nu+1}|}{|\zeta - x_\nu|^{2-\alpha}} \longrightarrow \frac{1}{2}\frac{|f''(\zeta)|}{k}. \tag{5,61}$$

Pour $\alpha = 1$, on a évidemment $k = |f''(\zeta)|$, donc

$$\frac{|\zeta - x_{\nu+1}|}{|\zeta - x_\nu|} \longrightarrow \frac{1}{2}. \tag{5,62}$$

Pour $\alpha > 1$, ajoutons à l'hypothèse (5,6) la suivante:

$$\frac{|f''(x)|}{|\zeta - x|^{\alpha-1}} \longrightarrow \alpha k, \tag{5,7}$$

---

[10]) La relation (5,5) se trouve en principe chez Fourier, l. c., livre 2, XXXII, avec une démonstration fort peu satisfaisante et sous des hypothèses apparemment très restrictives. Le caractère quadratique de la convergence du procédé de Newton se trouve aussi déduit dans le cas des fonctions analytiques dans un mémoire de Schröder, Math. Ann., t. 2 (1871), pp. 322—324.

et supposons de plus, que $f''(x)$ est continue dans un intervalle contenant ζ et tous les x_ν. Alors on a pour l'intégrale figurant en (5,3) à droite, en y remplaçant x_0 par x_ν,

$$\left|\int_{x_\nu}^{\zeta}(\zeta-u)f''(u)\,du\right| \sim ak\int_{x_\nu}^{\zeta}(\zeta-u)^\alpha\,du = \frac{\alpha}{\alpha+1}k(\zeta-x_\nu)^{\alpha+1}.$$

Donc

$$k|\zeta-x_\nu|^\alpha|\zeta-x_{\nu+1}| \sim \frac{\alpha}{\alpha+1}k|\zeta-x_\nu|^{\alpha+1},$$

$$\frac{\zeta-x_{\nu+1}}{\zeta-x_\nu} = \frac{\alpha}{\alpha+1} = 1-\frac{1}{p}, \tag{5,71}$$

où p est la multiplicité de la racine ζ de $f(x)$ [11]).

Nous allons enfin déduire quelques estimations directes pour „l'erreur" $|\zeta-x_\nu|$ en fonction de $|x_\nu-x_{\nu-1}|$.

Supposons que les conditions de Fourier soient satisfaites. Alors on a par définition, en utilisant la formule des accroissement finis,

$$x_\nu-x_{\nu-1} = \frac{f(\zeta)-f(x_{\nu-1})}{f'(x_{\nu-1})} = (\zeta-x_{\nu-1})\frac{f'(\xi_\nu)}{f'(x_{\nu-1})},$$

$$\frac{\zeta-x_{\nu-1}}{x_\nu-x_{\nu-1}} = \frac{f'(x_{\nu-1})}{f'(\xi_\nu)}, \quad \xi_\nu\in(x_{\nu-1},\zeta).$$

D'autre part, il résulte de (5,2), en y remplaçant x_0 et x_1 par $x_{\nu-1}$ et x_ν,

$$\frac{\zeta-x_\nu}{(\zeta-x_{\nu-1})^2} = -\frac{1}{2}\frac{f''(\eta_\nu)}{f'(x_{\nu-1})}, \quad \eta_\nu\in(x_{\nu-1},\zeta),$$

donc, en combinant ces formules,

$$\frac{\zeta-x_\nu}{(x_\nu-x_{\nu-1})^2} = -\frac{1}{2}\frac{f''(\eta_\nu)f'(x_{\nu-1})}{f'(\xi_\nu)^2}. \tag{5,8}$$

Supposons maintenant que $f''(x)$ soit bornée dans l'intervalle (x_0,ζ), et que l'on ait

$$|f''(x)|\leqq M, \quad x\in(x_0,\zeta).$$

D'autre part, $f'(x)^2$ atteint sa valeur minimum en ζ. Il en résulte

$$|\zeta-x_\nu|\leqq|x_\nu-x_{\nu-1}|^2\frac{M|f'(x_{\nu-1})|}{2f'(\zeta)^2}. \tag{5,81}$$

En appliquant cette formule, on remplacera $f'(\zeta)$ par $f'(b)$ ou bien par la valeur de $f'(x)$ en un point quelconque situé entre ζ et b. On obtient donc en formant

$$y_\nu = x_{\nu-1}+(x_\nu-x_{\nu-1})\left(1+|x_\nu-x_{\nu-1}|\frac{M|f'(x_{\nu-1})|}{2f'(b)^2}\right), \tag{5,9}$$

une valeur approchée de ζ, telle que ζ est situé entre x_ν et y_ν, et $|\zeta-y_\nu|$ est du même ordre du grandeur que $\zeta-x_\nu$. En particulier on a

$$\left|\frac{\zeta-y_\nu}{\zeta-x_\nu}\right| = \frac{M}{|f''(\eta_\nu)|}\left|\frac{f'(\xi_\nu)}{f'(b)}\right|^2-1. \tag{5,91}$$

---

[11]) Cf. pour le cas des fonctions analytiques Schröder, l. c.

L'expression de droite est ici en général relativement petite. Cependant, on peut la faire aussi petite que l'on veut, en appliquant (5,9) deux fois. La valeur $y_\nu^{(0)}$, obtenue la première fois, est située entre ζ et b. On peut alors remplacer b la formule (5,9) par $y_\nu^{(0)}$ et de même prendre pour M la borne supérieure M_ν de $|f''(x)|$ dans l'intervalle $(x_{\nu-1}, y_\nu^{(0)})$. Si $f''(x)$ est continue en ζ, l'expression

$$\frac{M_\nu}{f''(\eta_\nu)}\left|\frac{f'(\xi_\nu)}{f'(y_\nu^{(0)})}\right|^2 - 1$$

est, pour ν suffisamment grand, aussi petite que l'on veut. Pour le calcul pratique, il suffira de la faire plus petite que *un*. Dans ce cas on aura $|\zeta - y_\nu| < |\zeta - x_\nu|$ [12]).

L'application des formules développées dans ce numéro nécessite ou bien une discussion assurant la validité des conditions de Fourier ou bien la recherche d'une valeur de x_0 déjà suffisamment approchée.

Le théorème que nous allons exposer dans le No. suivant permet dans la plupart des cas d'épargner au calculateur toute analyse préalable concernant l'existence et la séparation de la racine cherchée.

---

[12]) On a à plusieurs reprises essayé de compléter le procédé de Newton, pour enfermer la racine cherchée ζ entre *deux* suites convergeant vers ζ. Fourier (l. c., livre 2, VII — X) propose de calculer avec les x_ν la suite des y'_ν,

$$y'_{\nu+1} = y'_\nu - \frac{f(y'_\nu)}{f'(x_\nu)},$$

en partant de $y'_0 = b$. Or, on peut démontrer que, bien que l'on ait $y'_\nu \longrightarrow \zeta$, les quotients $\frac{|\zeta - y'_\nu|}{|\zeta - x_\nu|}$ tendent vers ∞, si $f''(x)$ est continue. D'autre part, Dandelin (Mém. de l'Acad. roy. de Bruxelles, t. 3 (1826), p. 30) propose de combiner le procédé de Newton avec „la règle de fausse position" en formant la suite y''_ν:

$$y''_0 = b, \quad y''_{\nu+1} = y''_\nu - \frac{y''_\nu - x_\nu}{f(y''_\nu) - f(x_\nu)} f(y''_\nu).$$

On déduit immédiatement de la représentation graphique bien connue que la suite y''_ν converge vers ζ plus rapidement que y'_ν. De plus, en supposant que $f''(x)$ satisfait dans $[x_0, b]$ une condition de Lipschitz d'ordre positif, on peut démontrer que l'expression $\frac{|\zeta - y''_\nu|}{|\zeta - x_\nu|}$ tend, lorsque $\nu \longrightarrow \infty$, vers une limite finie et différente de 0, qui dépend de b d'une manière continue et peut être rendue arbitrairement petite en prenant b suffisamment approché de ζ. D'autre part, la formation des y''_ν exige, ainsi que celle de y'_ν, 50 % du travail calculatoire superflu. Ces deux méthodes sont donc inférieures à celle proposée dans le texte, puisqu'on peut former y_ν, dès que la valeur de $x_\nu - x_{\nu-1}$ reste audessous de la limite de l'erreur demandée, sans former $y_1, y_2, \ldots, y_{\nu-1}$. Cependant, on peut obtenir, avec la règle de fausse position, des bornes très reserrées en combinant directement b avec x_ν et en répétant le même procédé pour la valeur obtenue et x_ν.

6. Dans ce numéro nous allons démontrer la *règle* suivante:

V. *Soit* $f(x)$ *continue ainsi que sa dérivée au point* x_0 *et* $f(x_0) \neq 0$, $f'(x_0) \neq 0$. *Soit* J *l'intervalle fermé de* x_0 *à* $x_0 + 2h$, *où*

$$h = -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Supposons que $f'(x)$ *soit continue dans l'intervalle* J *et que* $f''(x)$ *existe et est bornée à l'intérieur de* J.

Soit M *une borne supérieure de* $|f''(x)|$ *à l'intérieur de* J. *Si l'on a*

$$2M|h| \leqslant |f'(x_0)|, \tag{6,1}$$

$f(x)$ *possède une et une seule racine* ζ *dans* J, *et la suite de Newton* (4,1), *formée en partant de* x_0, *converge vers* ζ. *De plus, on a*

$$\frac{|x_{\nu+1} - x_\nu|}{|x_\nu - x_{\nu-1}|^2} \leqslant \frac{M}{2|f'(x_\nu)|}, \tag{6,2}$$

$$|\zeta - x_{\nu+1}| \leqslant \frac{M}{|f'(x_\nu)|}|x_{\nu+1} - x_\nu|^2 = \delta_{\nu+1}, \tag{6,3}$$

et ζ *est situé dans l'intervalle* $[x_{\nu+1} - \delta_{\nu+1},\ x_{\nu+1} + \delta_{\nu+1}]$ [13]).

Démonstration. Nous allons démontrer d'abord qu'en posant

$$x_1 = x_0 + h, \quad h_1 = -\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}, \quad J_1 = [x_1,\ x_1 + 2h_1],$$

l'intervalle J_1 est contenu dans J et la relation $2M|h_1| \leqslant |f'(x_1)|$ est satisfaite. En effet, on a, en utilisant l'expression de Lagrange pour le reste de la formule de Taylor,

$$f(x_1) = f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{1}{2}h^2 f''(\xi) = \frac{1}{2}h^2 f''(\xi),$$

ξ étant contenu entre x_0 et x_1, donc

$$|f(x_1)| \leqslant \frac{1}{2}|h|^2 M.$$

D'autre part,

$$f'(x_1) = f'(x_0 + h) = f'(x_0) + hf''(\eta),$$

---

[13]) Le théorème V précise deux théorèmes de Cauchy (l. c., pp. 575 — 577). Quant à *l'existence* et *l'unicité* de la racine ζ en J, Cauchy les prouve dans son „théorème II", p. 575. Il est vrai que Cauchy fait l'hypothèse $2Mh < |f'(x_0)|$, mais sa démonstration s'étend immédiatement au cas où (6,1) est satisfaite avec le signe d'égalité. Quant à la *convergence* de la suite de Newton, elle est prouvée dans le „théorème III" de Cauchy, pp. 376 — 377, sous l'hypothèse que $2M|h|$ est plus petit que *la valeur minimum de* $|f'(x)|$ dans tout l'intervalle J. Enfin, au lieu de l'inégalité (6,2), Cauchy prouve l'inégalité

$$\frac{|x_{\nu+1} - x_\nu|}{|x_\nu - x_{\nu-1}|^2} \leqslant \frac{M}{2m_\nu},$$

où m_ν est la valeur minimum de $|f'(x)|$ dans l'intervalle $[x_\nu - |x_\nu - x_{\nu-1}|,\ x_\nu + |x_\nu - x_{\nu-1}|]$. Notre résultat est évidemment non seulement plus précis que celui de Cauchy, mais surtout plus commode pour le calculateur, qui est ainsi dispensé de calculer ou estimer m_ν.

η étant contenu entre x_0 et x_0+h. Donc d'après (6,1)

$$|f'(x_1)| \geqq |f'(x_0)| - |h|M \geqq \frac{1}{2}|f'(x_0)|.$$

Il en résulte pour h_1

$$|h_1| \leqq \frac{1}{2}|h|^2 \frac{M}{|f'(x_1)|}, \tag{6,4}$$

$$\frac{2M|h_1|}{|f'(x_1)|} \leqq \frac{1}{4}\left|\frac{2hM}{f'(x_0)}\right|^2 \left|\frac{f'(x_0)}{f'(x_1)}\right|^2 \leqq \frac{1}{4}\,2^2 = 1.$$

D'autre part, d'après (6,4)

$$\left|\frac{h_1}{h}\right| \leqq \frac{1}{2}|h|\frac{M}{|f'(x_1)|} \leqq \frac{1}{2}\cdot 2|h|\frac{M}{|f'(x_0)|} \leqq \frac{1}{2},$$

donc $2|h_1| \leqq |h|$ et J_1 est contenu dans J.

En appliquant le même raisonnement successivement à x_1, x_2 etc., on voit qu'en posant

$$-\frac{f(x_\nu)}{f'(x_\nu)} = h_\nu, \quad x_{\nu+1} = x_\nu + h_\nu, \quad J_\nu = [x_\nu, x_\nu + 2h_\nu], \tag{6,5}$$

chaque intervalle J_ν est contenu dans l'intervalle précédent $J_{\nu-1}$, et la longueur $2|h_\nu|$ de J_ν converge vers 0, puisque on a $\left|\frac{h_{\nu+1}}{h_\nu}\right| \leqq \frac{1}{2}$. Donc la suite x_ν converge vers un point ζ situé dans J et ζ est une racine de $f(x)$, puisque on a, par définition de x_ν,

$$\zeta = \zeta - \frac{f(\zeta)}{f'(\zeta)}.$$

D'autre part, on a pour chaque x à l'intérieur au sens étroit de J:

$$f'(x) = f'(x_0) + (x - x_0)f''(\eta),$$

$$|f'(x)| \geqq |f'(x_0)| - |x - x_0|M > |f'(x_0)| - 2M|h| \geqq 0.$$

Donc $f'(x)$ conserve le même signe à l'intérieur de J, et $f(x)$ possède une seule racine ζ dans J, qui ne peut être une racine multiple que si $\zeta = x_0 + 2h$. (Ce dernier cas n'est d'ailleurs possible que si $f(x)$ est un polynôme quadratique en x dans l'intervalle J, et ne peut se présenter que si l'on a pour tout ν $2M|h_\nu| = |f'(x_\nu)|$.) D'autre part, la relation (6,2) résulte de (6,4) immédiatement si l'on applique cette dernière relation à x_ν. Enfin, puisque ζ est contenu dans l'intervalle $J_{\nu+1}$, on a

$$|\zeta - x_{\nu+1}| \leqq 2h_{\nu+1} \leqq |h_\nu|^2 \frac{M}{|f'(x_\nu)|};$$

c'est la relation (6,3) et le théorème V est démontré.

7. En appliquant la règle V, on a à vérifier que (6,1) est satisfaite. Si h n'est pas encore suffisamment petit, on applique plusieurs fois le procédé de Newton jusqu'à ce que le théorème V puisse être appliqué. Si pour cet h ou un des h_ν suivants l'expression de gauche en (6,1) est plus petite que l'expression de droite, il est préférable d'appliquer la règle suivante plus précise:

VI. *Remplaçons dans l'hypothèse de* V *pour un* $\alpha > 2$ *l'intervalle* J *par l'intervalle* $J^* = \left[x_0,\ x_0 + \frac{2\alpha-2}{2\alpha-3}\,h\right]$ *et l'inégalité* (6,1) *par*

$$\alpha M\,|h| \leqslant |f'(x_0)|. \tag{7,1}$$

Alors on a pour $\nu = 1, 2, \ldots$

$$\alpha M\,|h_\nu| < |f'(x_\nu)|,$$

$f(x)$ *possède une et une seule racine* ζ *à l'intérieur au sens étroit de* J^*, *et la suite* x_ν *converge vers* ζ. *De plus, on a, en posant* $A = \frac{\alpha(2\alpha-3)}{(2\alpha-1)(\alpha-2)}$,

$$\frac{|x_{\nu+1}-x_\nu|}{|x_\nu - x_{\nu-1}|^2} \leqslant \frac{AM}{2|f'(x_0)|},$$

$$|\zeta - x_{\nu+1}| < \frac{AM}{|f'(x_0)|}\,|x_{\nu+1}-x_\nu|^2.$$

On prouve l'énoncé VI en poursuivant le même raisonnement que nous avons employé pour la démonstration de V et en remarquant qu'on a maintenant

$$f'(x_1) \geqslant \frac{\alpha-1}{\alpha}\,|f'(x_0)|, \qquad \left|\frac{h_{\nu+1}}{h_\nu}\right| \leqslant \frac{1}{2(\alpha-1)},$$

$$|f'(x_\nu)| \geqslant |f'(x_0)| - M\,|x_\nu - x_0| > |f'(x_0)|\left(1 - \frac{2\alpha-2}{\alpha(2\alpha-3)}\right) = \frac{|f'(x_0)|}{A}.$$

On voit aisément que l'expression A décroît, si α croît de 2 à l'infini, et converge vers 1. Pour $\alpha = 3$, on a $A = \frac{9}{5}$.

8. Nos résultats précédents peuvent être étendus aux fonctions analytiques d'une variable complexe.

VII. *Soit* $f(z)$ *holomorphe au point* z_0 *et* $f'(z_0) \neq 0$. *Soit* $h_0 = -\frac{f(z_0)}{f'(z_0)}$ *et* K_0 *le cercle*

$$|z - z_1| \leqslant |h_0|, \quad z_1 = z_0 + h_0.$$

Supposons que $f(z)$ *soit holomorphe dans* K_0. *Alors si l'on a dans* K_0

$$|f''(z)| \leqslant \frac{1}{2}\,\frac{|f'(z_0)|}{|h_0|} = \frac{1}{2}\,\frac{|f'(z_0)|^2}{|f(z_0)|}, \tag{8,1}$$

$f(z)$ *possède en* K_0 *une et une seule racine* ζ, *vers laquelle la suite de Newton*

$$z_0,\quad z_1,\quad \ldots,\quad z_{\nu+1} = z_\nu - \frac{f(z_\nu)}{f'(z_\nu)},\quad \ldots \tag{8,2}$$

converge en restant à l'intérieur de K_0. *Si* ζ *est situé à l'intérieur au sens étroit de* K_0, *c'est une racine simple.* ζ *ne peut être situé sur la périphérie de* K_0 *que si* $f(z)$ *est un polynôme quadratique.*

De plus on a, en posant $M = \sup_{z \in K_0} |f''(z)|$:

$$\frac{|z_{\nu+1} - z_\nu|}{|z_\nu - z_{\nu-1}|^2} \leqslant \frac{M}{2|f'(z_\nu)|}, \tag{8,3}$$

$$|\zeta - z_{\nu+1}| \leqslant \frac{M}{|f'(z_\nu)|} |z_{\nu+1} - z_\nu|^2. \tag{8,4}$$

Démonstration. (8,1) peut s'écrire

$$2M|h_0| \leqslant |f'(z_0)|. \tag{8,5}$$

Nous allons d'abord montrer, en posant

$$h_1 = -\frac{f(z_1)}{f'(z_1)}, \quad z_2 = z_1 + h_1,$$

que l'on a

$$2M|h_1| \leqslant |f'(z_1)| \tag{8,51}$$

et que le cercle

$$|z - z_2| \leqslant |h_1| \tag{K_1}$$

est contenu dans K_0. En effet on a, en intégrant le long du segment rectiligne allant de z_0 à z_1,

$$f(z_1) = \int_{z_0}^{z_1} (z_1 - z)\, f''(z)\, dz = h_0^2 \int_0^1 (1-t) f''(z_0 + t h_0)\, dt, \tag{8,6}$$

$$|f(z_1)| \leqslant \frac{M}{2} |h_0|^2,$$

$$|h_1| \leqslant \frac{1}{2} |h_0|^2 \frac{M}{|f'(z_1)|}, \tag{8,7}$$

$$\left|\frac{2Mh_1}{f'(z_1)}\right| \leqslant M^2 \frac{|h_0|^2}{|f'(z_1)|^2} = \frac{1}{4} \left|\frac{f'(z_0)}{f'(z_1)}\right|^2 \left|\frac{2Mh_0}{f'(z_0)}\right|^2. \tag{8,8}$$

D'autre part, on a

$$f'(z_1) = f'(z_0) + \int_{z_0}^{z_1} f''(z)\, dz,$$

et d'après (8,5)

$$|f'(z_1)| \geqslant |f'(z_0)| - |h_0| M \geqslant \frac{1}{2} |f'(z_0)|.$$

Donc $\left|\frac{f'(z_0)}{f'(z_1)}\right| \leqslant 2$ et l'on conclue de (8,8)

$$\left|\frac{2Mh_1}{f'(z_1)}\right| \leqslant \left|\frac{2Mh_0}{f'(z_0)}\right|^2 \leqslant 1,$$

d'où résulte immédiatement (8,51).

D'autre part on a d'après (8,7)

$$\left|\frac{h_1}{h_0}\right| \leqslant \frac{1}{4} \left|\frac{2Mh_0}{f'(z_0)}\right| \left|\frac{f'(z_0)}{f'(z_1)}\right| \leqslant \frac{1}{2}.$$

Donc, comme le rayon $|h_1|$ de K_1 est au plus égal à la moitié du rayon $|h_0|$ de K_0 et que la périphérie de K_1 passe par le centre de K_0, on conclue que K_1 est contenu dans K_0.

Or, la même déduction peut être exactement appliquée aux points z_1, z_2 etc. Il en résulte l'existence d'une suite infinie de cercles K_ν, $\nu = 1, 2, \ldots$, aux centres z_ν et aux rayons $|h_\nu| = \left|\frac{f(z_\nu)}{f'(z_\nu)}\right|$, tels que chaque K_ν est contenu dans $K_{\nu-1}$ et que les rayons $|h_\nu|$ convergent vers 0.

Donc la suite z_ν converge vers un point ζ situé ou bien à l'intérieur ou bien sur la périphérie de K_0. On obtient de (8,2) pour $\nu \to \infty$

$$\zeta = \zeta - \frac{f(\zeta)}{f'(\zeta)},$$

donc $f(\zeta) = 0$.

D'autre part on obtient pour $\nu = 0, 1, \ldots$

$$|2Mh_\nu| \leqq |f'(z_\nu)|, \tag{8,52}$$

$$|h_{\nu+1}| \leqq \frac{1}{2}|h_\nu|^2 \frac{M}{|f'(z_\nu)|}, \tag{8,71}$$

c'est-à-dire (8,3), et enfin

$$2^\nu |f'(z_\nu)| \geqq |f'(z_0)|. \tag{8,72}$$

Nous allons maintenant montrer qu'il n'y a pas d'autres racines que ζ dans K_0. En effet, supposons que, pour un ζ^* qui est situé dans K_0, on ait $f(\zeta^*) = 0$. Alors il résulte de (8,2) et (8,52)

$$f'(z_\nu)(\zeta^* - z_{\nu+1}) = -[f(\zeta^*) - f(z_\nu) - (\zeta^* - z_\nu) f'(z_\nu)] =$$

$$= -\int_{z_\nu}^{\zeta^*} (\zeta^* - z) f''(z)\, dz = (\zeta^* - z_\nu)^2 \int_0^1 (t-1) f''(z_\nu + t(\zeta^* - z_\nu))\, dt,$$

$$\left|\frac{\zeta^* - z_{\nu+1}}{\zeta^* - z_\nu}\right| \leqq \left|\frac{\zeta^* - z_\nu}{f'(z_\nu)}\right| \frac{M}{2} = \frac{1}{4} \prod_{\mu=0}^{\nu-1} \left|2\frac{\zeta^* - z_{\mu+1}}{\zeta^* - z_\mu}\right| \left|\frac{\zeta^* - z_0}{h_0}\right| \left|\frac{2h_0 M}{2^\nu f'(z_\nu)}\right|,$$

où, pour $\nu = 0$, le produit a la valeur *un*. D'après (8,72), il suit que

$$\left|2\frac{\zeta^* - z_{\nu+1}}{\zeta^* - z_\nu}\right| \leqq \frac{1}{2} \prod_{\mu=0}^{\nu-1} \left|2\frac{\zeta^* - z_{\mu+1}}{\zeta^* - z_\mu}\right|,$$

et l'on conclue de cette dernière inégalité, écrite successivement pour $\nu = 0, 1, \ldots$,

$$\left|\frac{\zeta^* - z_{\nu+1}}{\zeta^* - z_\nu}\right| \leqq \frac{1}{4}.$$

Donc la suite z_ν converge vers ζ^* et ζ^* est l'unique racine de $f(z)$ dans K_0.

Enfin, puisque ζ est contenu dans $K_{\nu+1}$, on a d'après (8,71)

$$|\zeta - z_{\nu+1}| \leqq 2|h_{\nu+1}| \leqq \frac{M}{|f'(z_\nu)|} |z_{\nu+1} - z_\nu|^2,$$

et c'est (8,4).

Enfin on a pour chaque z à l'intérieur au sens étroit de K_0

$$f'(z) = f'(z_0) + \int_{z_0}^{z} f''(z)\, dz,$$

$$|f'(z)| \geqslant |f'(z_0)| - |z - z_0| M > |f'(z_0)| - 2|h_0| M \geqslant 0.$$

Donc on a $f'(z) \neq 0$ à l'intérieur au sens étroit de K_0.

Enfin ζ ne peut être situé sur la périphérie de K_0 que si l'on a le signe d'égalité dans toutes nos estimations, ce qui n'est possible que si $f''(z) = \text{const.}$ et $f(z)$ est un polynôme quadratique. Donc le théorème VI est démontré [14]).

9. Nous allons maintenant étudier la convergence du procédé qu'on obtient du procédé (4,1) de Newton, en remplaçant partout $f'(x_\nu)$ par sa valeur initiale $f'(x_0)$. Si dans l'intervalle (x_0, ζ) $|f'(x)|$ atteint sa valeur maximum en x_0, on a affaire avec un cas particulier du procédé de M. de Misès. Nous allons faire une hypothèse plus large.

VIII. *Soit $f(x)$ continue ainsi que sa dérivée $f'(x)$ en x_0 et $f'(x_0) \neq 0$. Soit J l'intervalle (fermé) de x_0 à $x_0 + 2h$, où*

$$h = -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Supposons que $f(x)$ et $f'(x)$ soient continues dans J et que $f''(x)$ existe et est bornée à l'intérieur de J.

Soit M une borne supérieure de $|f''(x)|$ à l'intérieur de J. Si l'on a

$$3M|h| \leqslant |f'(x_0)|, \tag{9,1}$$

$f(x)$ possède une et une seule racine ζ dans J, vers laquelle converge la suite

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}, \quad x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_0)}, \quad \ldots, \quad x_{\nu+1} = x_\nu - \frac{f(x_\nu)}{f'(x_0)}, \ldots \tag{9,2}$$

De plus, on a

$$\left|\frac{x_{\nu+1} - x_\nu}{x_\nu - x_{\nu-1}}\right| < 2|h| \frac{M}{|f'(x_0)|} \leqslant \frac{2}{3}, \tag{9,3}$$

$$\frac{|x_{\nu+1} - x_\nu|}{|x_\nu - x_{\nu-1}|} \longrightarrow 1 - \frac{f'(\zeta)}{f'(x_0)}. \tag{9,4}$$

Démonstration. Posons

$$h = h_0, \quad \frac{M}{|f'(x_0)|} = \varkappa, \quad h_\nu = -\frac{f(x_\nu)}{f'(x_0)}, \quad \nu = 1, 2, \ldots$$

---

[14]) Quant à l'existence (et l'unicité) d'une racine de $f(z)$ dans K_0, elle a été démontrée par Cauchy (l. c.) sous la condition

$$4M|h_0| < |f'(z_0)|,$$

qui est évidemment plus étroite que (8,5). La convergence du procédé de Newton a été démontré par Cauchy (l. c.) sous la condition encore plus étroite

$$4M|h_0| < \min_{z \in K_0} |f'(z)|.$$

On trouve une étude du procédé de Newton dans le cas d'une variable complexe dans un mémoire de M. G. Faber, Ueber die Newtonsche Näherungsformel, Journ. f. d. r. u. a. Math., t. 138 (1910), p. 1—21.

On peut supposer que $h_0 \neq 0$. Supposons que pour un $n \geqslant 1$ tous les points $x_0, x_1, \ldots, x_n$ soient contenus à l'intérieur de J, ce qui est immédiat pour $n = 1$. Alors on peut former

$$h_\nu = -\frac{f(x_\nu)}{f'(x_0)} = -\frac{f(x_{\nu-1} + h_{\nu-1})}{f'(x_0)}, \quad \nu = 1, 2, \ldots, n,$$

donc, d'après la formule des accroissements finis,

$$h_\nu = -\frac{f(x_{\nu-1}) + h_{\nu-1} f'(\xi_\nu)}{f'(x_0)} = h_{\nu-1}\left(1 - \frac{f'(\xi_\nu)}{f'(x_0)}\right), \tag{9,5}$$

$$h_\nu = h_{\nu-1}\frac{f'(x_0) - f'(\xi_\nu)}{f'(x_0)} = h_{\nu-1}(x_0 - \xi_\nu)\frac{f''(\xi'_\nu)}{f'(x_0)},$$

où ξ_ν est situé entre $x_{\nu-1}$ et x_ν et ξ'_ν entre x_0 et ξ_ν, donc dans J. Il s'ensuit pour $\nu = 1, 2, \ldots, n$

$$\left|\frac{h_\nu}{h_{\nu-1}}\right| \leqslant |\xi_\nu - x_0| \frac{M}{|f'(x_0)|} < (|h_0| + |h_1| + \ldots + |h_{\nu-1}|)\varkappa. \tag{9,6}$$

Pour $\nu = n = 1$, on a

$$|h_1| < |h_0|^2 \varkappa \leqslant \frac{1}{3}|h_0|. \tag{9,7}$$

Quant à la relation (9,6) pour $\nu = 2, 3, \ldots, n$, elle n'est démontrée que *dans l'hypothèse que tous les points* $x_0, x_1, \ldots, x_n$ *sont situés dans* J.

Nous affirmons maintenant qu'on a pour $\nu = 1, 2, \ldots$

a) $|h_1| + |h_2| + \ldots + |h_\nu| < 3|h_1| < |h_0|$,

b) $\left|\frac{h_{\nu+1}}{h_\nu}\right| < 2|h_0|\varkappa$.

En effet, supposons que la relation a) soit déjà démontrée pour $\nu = 1, 2, \ldots, n$, ce qui est, d'après (9,7), en tout cas vrai pour $n = 1$. Alors tous les points $x_0, x_1, \ldots, x_{n+1}$ sont situés dans J, donc on peut appliquer (9,6) pour $\nu = 1, 2, \ldots, n+1$, et l'on a

$$\left|\frac{h_{\nu+1}}{h_\nu}\right| < (|h_0| + |h_1| + \ldots + |h_\nu|)\varkappa \leqslant 2|h_0|\varkappa, \quad \nu = 0, 1, \ldots, n.$$

Donc les relations b) sont valables pour $\nu = 0, 1, \ldots, n$.

Mais maintenant on a pour $\nu = 1, 2, \ldots, n$ d'après (9,1)

$$\left|\frac{h_{\nu+1}}{h_\nu}\right| < \frac{2}{3}, \quad |h_{\nu+1}| < \left(\frac{2}{3}\right)^\nu |h_1|,$$

$$|h_1| + |h_2| + \ldots + |h_{n+1}| < |h_1|\left\{1 + \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \ldots\right\} = 3|h_1|,$$

et d'après (9,7) la relation a) pour $\nu = n + 1$. Donc les deux relations a) et b) sont valables pour $\nu = 1, 2, \ldots$, et notre affirmation est démontrée. Il s'ensuit en particulier que tous les x_ν sont situés dans J et

que la série $x_0 + h_0 + h_1 + \dots$ converge vers un nombre ζ situé dans J. Donc on a

$$x_\nu \to \zeta, \quad f(x_\nu) \to 0, \quad f(\zeta) = 0.$$

De plus on a

$$|\zeta - x_1| \leqq \sum_{\nu=1}^{\infty} |h_\nu| \leqq 3|h_1| < |h_0|,$$

donc ζ est situé à l'intérieur au sens étroit de J.

D'autre part, on a dans J

$$|f'(x) - f'(x_0)| \leqq M|x - x_0| \leqq 2|h|M \leqq \frac{2}{3}|f'(x_0)|,$$

donc $f'(x)$ est différente de 0 dans J et ζ est l'unique racine de $f(x)$ dans J. (9,3) suit immédiatement de la relation b) et (9,4) est une conséquence immédiate de (9,5), où ξ_ν est situé entre $x_{\nu-1}$ et x_ν et tend vers ζ avec x_ν. Le théorème VIII est donc complètement démontré.

En tenant compte de la relation

$$\zeta - x_\nu = (x_{\nu+1} - x_\nu) + (x_{\nu+2} - x_{\nu+1}) + \dots,$$

on déduit de (9,3):

$$\frac{|\zeta - x_\nu|}{|x_\nu - x_{\nu-1}|\,|x_1 - x_0|} \leqq \frac{2\varkappa}{1 - 2|h|\varkappa}, \tag{9,8}$$

et en particulier

$$\frac{|\zeta - x_1|}{|x_1 - x_0|^2} \leqq \frac{2\varkappa}{1 - 2|h|\varkappa}, \tag{9,9}$$

$$\frac{|\zeta - x_2|}{|x_1 - x_0|^3} \leqq \frac{4\varkappa^2}{1 - 2|h|\varkappa}. \tag{9,91}$$

Le théorème VIII reste valable pour le cas d'une fonction $f(x)$ de la variable complexe x, holomorphe dans le cercle $|x - x_1| \leqq |h_0|$, si l'on remplace J dans l'énoncé du théorème VIII par ce cercle. En effet, notre démonstration de VIII reste valable à l'exception de la démonstration de (9,6). Or, on peut modifier cette dernière démonstration de la manière suivante: On a

$$h_\nu = -\frac{f(x_{\nu-1} + h_{\nu-1})}{f'(x_0)} = -\frac{f(x_{\nu-1}) + \int_{x_{\nu-1}}^{x_\nu} f'(x)\,dx}{f'(x_0)},$$

$$h_\nu = \frac{h_{\nu-1} f'(x_0) - \int_{x_{\nu-1}}^{x_\nu} f'(x)\,dx}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(x_0)} \int_{x_{\nu-1}}^{x_\nu} [f'(x_0) - f'(x)]\,dx,$$

$$h_\nu = \frac{-1}{f'(x_0)} \int_{x_{\nu-1}}^{x_{\nu-1} + h_{\nu-1}} dx \int_{x_0}^{x} f''(y)\,dy,$$

$$|h_\nu| < \frac{|h_{\nu-1}|}{|f'(x_0)|} (|x_{\nu-1} - x_0| + |h_{\nu-1}|) M,$$

et (9,6) en suit immédiatement.

10. Il est utile de comparer la rapidité de la convergence pour le procédé original de Newton à celle du „procédé de Newton simplifié" du No 9, ainsi qu'a une combinaison de ces procédés.

Supposons que $\delta = |\zeta - x_0|$ soit suffisamment petit. Alors il résulte de la formule (6,3) que les approximations successives données par le procédé de Newton possèdent les ordres de grandeur

$$\delta^2, \quad \delta^4, \quad \delta^8, \quad \delta^{16}, \quad \ldots$$

En appliquant le procédé de Newton simplifié, on a d'après (9,8) successivement des approximations possédant les ordres de grandeur

$$\delta^2, \quad \delta^3, \quad \delta^4, \quad \ldots$$

Supposons enfin qu'on applique le procédé de Newton et le procédé simplifié *alternativement,* en calculant $f(x)$ de nouveau en sautant chaque fois un tour, c'est-à-dire seulement pour $x_0, x_2, x_4, \ldots$, et en remplaçant dans (4,1) resp. $f'(x_1)$, $f(x_3)$, $f'(x_5), \ldots$ par $f'(x_0)$, $f'(x_2)$, $f'(x_4), \ldots$ Nous appelons ce procédé le *procédé de Newton alterné.* Alors on obtient par (9,9) et (9,91) les ordres de grandeur suivants pour les approximations consécutives:

$$\delta^2, \quad \delta^3, \quad \delta^6, \quad \delta^9, \quad \delta^{18}, \quad \delta^{27}, \quad \ldots$$

Cependant, pour comparer l'efficacité de ces différents procédés, il faut tenir compte du travail exigé pour une étape du procédé en question.

Pour définir une unité de travail calculatoire suffisante pour notre but — bien que fort conventionnelle — nous négligerons le travail d'une simple division nécessaire pour le calcul de $x_{\nu+1} - x_\nu$ et supposons que le travail de calcul d'une valeur de $f(x)$ pour un x quelconque soit sensiblement le même que pour le calcul de $f'(x)$. Ce travail, nécessaire pour le calcul de $f(x)$ ou de $f'(x)$, sera employé dans ce qui suit comme unité de travail calculatoire. Nous l'appelons un „*Horner*". Il est à peine nécessaire de remarquer que le travail d'un Horner est généralement très différent pour les fonctions $f(x)$ différentes.

Avec cette convention on voit que dans le procédé de Newton on dépense consécutivement 2, 4, 6, 8,... Horners. Dans le procédé de Newton simplifié on dépense consécutivement 2, 3, 4,... Horners. Enfin dans le procédé de Newton alterné on dépense consécutivement 2, 3; 5, 6; 8, 9;... Horners. En particulier, en dépensant 6 Horners dans nos procédés, on atteint les ordres de grandeur suivants:

$$\delta^8, \quad \delta^7, \quad \delta^9.$$

Il apparaît que le procédé alterné est à la longue le plus économique. Ce procédé présente encore cet avantage qu'on calcule plus fréquemment les valeurs de $f(x)$ que celles de $f'(x)$, ce qui implique un plus grand nombre de contrôles que dans le procédé original de Newton.

On a considéré à plusieurs reprises [15]) une généralisation du procédé de Newton qui utilise les valeurs des trois fonctions $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$

---

[15]) Cauchy, l. c., pp. 582 — 588. Schröder, l. c. Faber, l. c.

et dont l'application permet d'arriver consécutivement aux ordres de grandeur

$$\delta^3, \quad \delta^9, \quad \delta^{27}, \quad \ldots$$

Ce procédé est un peu plus compliqué, mais plus économique, que celui de Newton. Cependant on y emploie, pour arriver à un certain ordre d'approximation, le même nombre de Horners que dans le procédé de Newton alterné sans avoir le même nombre de contrôles.

Nous arrivons à la conclusion que *le procédé de Newton alterné est le meilleur pour le calcul pratique, si l'on part d'une valeur* x_0 *suffisamment rapprochée.*

О НЕКОТОРЫХ ОЦЕНКАХ НАИЛУЧШЕГО ПРИБЛИЖЕНИЯ И В ЧАСТНОСТИ ОБ ОДНОЙ ОСНОВНОЙ ТЕОРЕМЕ ВАЛЛЕ ПУССЕНА.

Е. Я. Ремез (Киев).

1. Среди основных предложений, относящихся к оценке наилучшего приближения (минимального приближения) ρ функции действительного переменного $f(x)$ на данном отрезке $a \leqslant x \leqslant b$ посредством полинома степени $\leqslant n$, следующая теорема, принадлежащая Валле Пуссену [1]), является, без сомнения, одною из наиболее важных:

„Пусть $P_n(x)$ означает некоторый полином степени $\leqslant n$ и допустим, что разность $f - P_n$ принимает в некоторых $n+2$ последовательных точках $x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n+1}$ отрезка $[a, b]$ значения с чередующимся знаком; тогда, обозначая через μ наименьшую из абсолютных величин $|f(x_i) - P_n(x_i)|$, $i = 0, 1, 2, \ldots, n+1$, можно утверждать, что $\rho \geqslant \mu$.“

Известна существенная роль, которую суждено было сыграть этой теореме при решении некоторых основных проблем, касающихся определения *порядка наилучшего приближения* непрерывных функций [2]). С другой стороны, автор настоящей заметки имел случай оценить всю важность этой же теоремы с несколько иной точки зрения, когда он предпринял некоторые исследования в направлении разработки общих способов последовательного приближения для эффективного численного определения полиномов наилучшего приближения [3]).

В первых трех параграфах настоящей заметки я отмечаю синтетически некоторые предложения, имеющие своим предметом либо повышение нижней границы, которая устанавливается для наилучшего приближения теоремою Валле Пуссена (пп. 1, 2), либо распространение этой теоремы на общие случаи аппроксимации ограниченной функции посредством линейных комбинаций, с постоянными коэфициентами, некоторых других ограниченных функций (п. 3) [4]).

---

[1]) Ch. de la Vallée Poussin, Sur les polynômes d'approximation et la représentation approchée d'un angle, Bulletins de l'Acad. de Belgique, 1910, pp. 808 — 844, n° n° 15, 17.

[2]) Ср. S. Bernstein, Sur les recherches récentes relatives à la meilleure approximation des fonctions continues par des polynômes, Proceedings of the fifth international congress of mathematicians, т. I.

[3]) а) Comptes Rendus Paris, séance du 11 juin 1934; б) там же, séance du 30 juillet 1934; в) Записки Харківського математичного товариства, сер. 4, т. X (1934); г) монография „Про методи найкращого, в розумінні Чебишова, наближеного представления функций“, Видавництво Української Академії Наук, 1935.

[4]) В этот параграф (п. 3) вошли некоторые результаты моих предшествующих исследований; см. предыдущую сноску, г).

Прежде всего, если обозначить, в условиях теоремы Валле Пуссена, через μ' наименьшее из *положительных* значений, принимаемых разностью $f - P_n$ на множестве рассматриваемых $n+2$ точек, и через μ'' — наименьшую из абсолютных величин *отрицательных* значений (той же разности на том же множестве $n+2$ точек), *тогда среднее арифметическое* $\frac{1}{2}(\mu' + \mu'')$ *все еще является нижней границей для наилучшего приближения* ρ.

Доказательство этого правила получается непосредственно путем замены в теореме Валле Пуссена $P_n(x)$ на $P_n(x) + \frac{\mu' - \mu''}{2}$. Это простое замечание само по себе может быть использовано весьма часто в практике приближенного определения полиномов наилучшего приближения.

Мы приходим (п. 2) к дальнейшему повышению нижней границы наилучшего приближения, исходя из того основного замечания, что числитель и знаменатель известного явного выражения, найденного Валле Пуссеном [1]) для наилучшего приближения ρ_0 на множестве $n+2$ точек, могут быть рассматриваемы как разделенные разности $(n+1)$-го порядка от некоторых функций, и преобразовывая эти разделенные разности надлежащим образом.

В последнем параграфе (п. 4) выясняется, что то же замечание может служить точкой отправления также в исследовании или доказательстве некоторых других, важных в том или ином отношении, свойств наилучшего приближения.

2. Пусть дано множество m точек $(m \geqslant 1)$

$$z_1 < z_2 < \ldots < z_m \tag{1}$$

на действительной оси и некоторая функция $f(z)$, определенная на этом точечном множестве. Положим

$$(z - z_1)\ (z - z_2) \ldots (z - z_m) = \omega(z) \tag{2}$$

и рассмотрим разделенную разность $(m-1)$-го порядка

$$f(z_1,\ z_2, \ldots,\ z_m) = \sum_{i=1}^{m} \frac{f(z_i)}{\omega'(z_i)}\,. \tag{3}$$

В силу рекуррентных соотношений, связывающих разделенные разности последовательных порядков, мы можем выразить разделенную разность (3) через линейные однородные комбинации разделенных разностей низших порядков, а именно

$$\begin{aligned} f(z_1,\ z_2, \ldots,\ z_m) &= \frac{1}{z_1 - z_m} f(z_1,\ z_2, \ldots,\ z_{m-1}) - \\ &- \frac{1}{z_1 - z_m} f(z_2,\ z_3, \ldots,\ z_m) = \\ &= \frac{1}{(z_1 - z_m)(z_1 - z_{m-1})} f(z_1, z_2, \ldots, z_{m-2}) - \end{aligned} \tag{4}$$

$$-\left(\frac{1}{(z_1-z_m)(z_1-z_{m-1})}+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{(z_1-z_m)(z_2-z_m)}\right)f(z_2, z_3, \ldots, z_{m-1})+$$
$$+\frac{1}{(z_1-z_m)(z_2-z_m)}f(z_3, z_4, \ldots, z_m)=\ldots$$

Разумея под r какое-нибудь из чисел $1, 2, \ldots, m-1$, будем иметь вообще

$$f(z_1, z_2, \ldots, z_m)=\sum_{s=1}^{r+1} A_{r,s}^{(m)} f(z_s, z_{s+1}, \ldots, z_{s+m-r-1}), \tag{5}$$

где $A_{r,s}^{(m)}=A_{r,s}^{(m)}(z_1, z_2, \ldots, z_m)$ означают некоторые рациональные выражения, не зависящие от рассматриваемой функции $f(z)$, и мы усматриваем непосредственно, переходя от r к $r+1$, что *коэфициенты* $A_{r,s}^{(m)}$ $(s=1, 2, \ldots, r+1)$ *в формуле* (5) *всегда имеют чередующиеся знаки*:

$$(-1)^{r+s-1}A_{r,s}^{(m)}>0 \tag{6}$$

$$(m\geqslant 2;\ r=1, 2, \ldots, m-1;\ s=1, 2, \ldots, r+1).$$

Обращаясь к предмету настоящей заметки, мы займемся рассмотрением некоторых свойств наилучшего приближения ρ_0 функции $f(x)$ на множестве $n+2$ точек $x_0<x_1<x_2<\ldots<x_{n+1}$, *расположенных на отрезке* $[a, b]$. Отношение этих свойств к оценке наилучшего приближения ρ на всем отрезке $[a, b]$ определяется очевидным неравенством $\rho\geqslant\rho_0$.

Рассмотрим известную принадлежащую Валле Пуссену[5]) формулу для наилучшего приближения посредством полинома степени $\leqslant n$ на множестве $n+2$ точек. Представляя ее в виде

$$\pm\rho_0=\frac{\frac{f(x_0)}{\omega'(x_0)}+\frac{f(x_1)}{\omega'(x_1)}+\ldots+\frac{f(x_{n+1})}{\omega'(x_{n+1})}}{\frac{1}{\omega'(x_0)}-\frac{1}{\omega'(x_1)}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{1}{\omega'(x_{n+1})}}, \tag{7}$$

где $\omega(x)$ имеет значение, аналогичное (2) [разумеется, с заменою множества m точек (1) множеством $n+2$ точек $x_0<x_1<x_2<\ldots<x_{n+1}$], мы замечаем, что числитель представляет собой не что иное как $f(x_0, x_1, \ldots, x_{n+1})$, в то время как знаменатель равным образом представляет собою разделенную разность другой функции $\chi(x)$, определяемой на рассматриваемом множестве точек условиями

$$\chi(x_i)=(-1)^i \quad (i=0, 1, 2, \ldots, n+1). \tag{8}$$

В том специальном случае, когда $f(x)$ имеет *чередующиеся знаки* при $x=x_0, x_1, \ldots, x_{n+1}$, наилучшее приближение ρ_0 оказывается пред-

---

[5]) Op. cit.; см. также его Leçons sur l'approximation des fonctions d'une variable réelle, n°n° 58, 59.

ставленным при помощи формулы (7) в виде обобщенного *среднего арифметического* $n+2$ *положительных* количеств $|f(x_i)|$, взятых с положительными же весами. Это дает возможность в упомянутом специальном случае непосредственно получить с помощью наименьшего из $n+2$ количеств $|f(x_i)|$ нижнюю границу для ρ_0; заменяя же в *общем* случае f на $f-P_n$ и помня, что $\rho_0 \leqslant \rho$, мы и получаем доказательство классической теоремы Валле Пуссена (п. 1). Переписывая формулу (7) в виде

$$\pm\rho_0 = \frac{f(x_0, x_1, \ldots, x_{n+1})}{\chi(x_0, x_1, \ldots, x_{n+1})} \tag{9}$$

и пользуясь преобразованием (5), можно поставить себе целью отыскать некоторые другие значения для нижней границы наилучшего приближения.

Сама формула (7) может быть получена, если выразить числитель и знаменатель в (9) посредством линейных комбинаций разделенных разностей *нулевого порядка* соответственно функций $f(x)$ и $\chi(x)$. Используя в следующую очередь разности *первого порядка*, получаем

$$\pm\rho_0 = \frac{\sum_{s=0}^{n} A_{n,s}^{(n+2)} f(x_s, x_{s+1})}{\sum_{s=0}^{n} A_{n,s}^{(n+2)} \chi(x_s, x_{s+1})} = \frac{\sum_{s=0}^{n} A_{n,s}^{(n+2)} \dfrac{f(x_s)-f(x_{s+1})}{x_s - x_{s+1}}}{\sum_{s=0}^{n} A_{n,s}^{(n+2)} \dfrac{\chi(x_s)-\chi(x_{s+1})}{x_s - x_{s+1}}}. \tag{10}$$

Это может быть записано также, если положить $\dfrac{A_{n,s}^{(n+2)}}{x_s - x_{s+1}} = B_{n,s}$, в виде [6])

$$\pm\rho_0 = \frac{\sum_{s=0}^{n} B_{n,s}[f(x_s)-f(x_{s+1})]}{\sum_{s=0}^{n} B_{n,s}[\chi(x_s)-\chi(x_{s+1})]}, \tag{11}$$

где $B_{n,s}$ $(s=0, 1, \ldots, n)$ все еще имеют чередующиеся знаки:

$$(-1)^{n+s} B_{n,s} > 0, \tag{6'}$$

и где разности $\chi(x_s)-\chi(x_{s+1})$, знаки которых также чередуются, *имеют все одну и ту же абсолютную величину* 2.

Допустим теперь, что найден некоторый полином $P_n(x)$ степени $\leqslant n$, такой, что разность

$$f(x) - P_n(x) = \Delta(x) \tag{12}$$

имеет чередующиеся знаки при $x = x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$. Поскольку наи-

[6]) Как мне сейчас стало известно, формула, эквивалентная (11), была для иной цели использована R. Suppantschitsch'ем (Sitzungsberichte der Wiener Akademie, Abt. IIa, т. 123 (1914), стр. 1553—1618).

лучшее приближение порядка n для $f(x)$ является таковым же и для $\Delta(x)$, мы можем заменить в числителе (11) $f(x)$ на $\Delta(x)$. Тогда, очевидно, будем иметь

$$\rho_0 = \frac{\sum_{s=0}^{n} |B_{n,s}| \frac{|\Delta(x_s)| + |\Delta(x_{s+1})|}{2}}{\sum_{s=0}^{n} |B_{n,s}|}. \tag{13}$$

Отсюда получаем следующее неравенство, которое дает *новую нижнюю границу для наилучшего приближения:*

$$\rho \geqslant \rho_0 \geqslant \min_{s=0,1,\ldots,n} \left\{ \frac{|\Delta(x_s)| + |\Delta(x_{s+1})|}{2} \right\}. \tag{14}$$

Это неравенство существенно дополняет и уточняет правило, сформулированное в п. 1.

Если, переходя, далее, к выражениям через разности высших порядков, мы пожелаем получать величину наилучшего приближения ρ_0 в виде среднего арифметического, как это имело место в случае разностей нулевого и первого порядков, то придется ограничиться случаем *эквидистантных* точек $x_0, x_1, \ldots, x_{n+1}$. Например, пользуясь разностями второго порядка, мы получаем

$$\pm \rho_0 = \frac{\sum_{i=0}^{n-1} C_{n-1}^{i} (-1)^i \frac{f(x_i) - 2f(x_{i+1}) + f(x_{i+2})}{4}}{\sum_{i=0}^{n-1} C_{n-1}^{i}}, \tag{15}$$

где C_{n-1}^{i} $(i = 0, 1, \ldots, n-1)$ обозначают биномиальные коэфициенты. Вполне аналогичные формулы получаем, беря разности любого другого порядка (разумеется, меньшего $n+1$).

Применяя, например, формулу (15) к случаю функции $f(x) = |x|$ на отрезке $[-1, 1]$, находим почти без вычислений, что наилучшее приближение для $|x|$ на множестве $2k+1$ точек $x_i = -1 + \frac{i}{k}$ $(i = 0, 1, 2, \ldots, 2k)$ посредством полинома степени $\leqslant 2k-1$ имеет своим асимптотическим значением $\frac{1}{2\sqrt{\pi}} k^{-3/2}$ при $k \to \infty$.

3. Общая задача наилучшего приближения ограниченной функции $f(x, y, \ldots, u)$ (которая в остальном может обладать любыми разрывами непрерывности и к тому же не должна непременно быть однозначно определенною) на некотором точечном множестве пространства $(x, y, \ldots, u)$ посредством линейной комбинации

$$C_1\psi_1(x, y, \ldots, u) + C_2\psi_2(x, y, \ldots, u) + \ldots + C_n\psi_n(x, y, \ldots, u) \tag{16}$$

n ограниченных, линейно независимых между собой функций, так же как и соответствующие задачи, касающиеся решения систем эмпириче-

ских уравнений, содержатся в *„задаче минимального приближения“* (термин принадлежит Goedseels'y и Валле Пуссену), которая может быть формулирована следующим образом [7]):

Пусть дана система несовместных линейных уравнений

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = l, \tag{17}$$

в конечном или бесконечном числе; x_1 x_2, ..., x_n представляют неизвестные, подлежащие приближенному определению (число n неизвестных является фиксированным), коэфициенты же a_1, a_2, ..., a_n, l являются переменными, подчиненными тому условию, что точка Q с координатами a_1, a_2, ..., a_n, l пробегает некоторое заданное точечное множество G в пространстве (a_1, a_2, ..., a_n, l). Обозначим через Δ отклонение

$$l - (a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n) = \Delta. \tag{18}$$

Задача минимального приближения состоит в определении значений неизвестных x_1, x_2, ..., x_n под условием минимизации величины

$$\sup_{Q \subset G} |\Delta| = L(x_1, x_2, \ldots, x_n). \tag{19}$$

Назовем *расширенной системой* ту систему несовместных линейных уравнений, которая соответствует замкнутому множеству $G^0 = G + G'$ (замыканию множества G). Величина (19) *не меняется* при замене G на G^0. Условимся еще говорить, что r линейных форм

$$f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_{1i}x_1 + a_{2i}x_2 + \ldots + a_{ni}x_n \quad (i = 1, 2, \ldots, r;\ r \leqslant n+1) \tag{20}$$

являются *линейно зависимыми в узком смысле*, если существует система r постоянных k_1, k_2, ..., k_r, которые все отличны от нуля, и таких, что

$$k_1f_1 + k_2f_2 + \ldots + k_nf_n \equiv 0, \tag{21}$$

предполагая, сверх того, что между $f_1, f_2, \ldots, f_r$ не существует другой зависимости этого же рода при меньшем числе членов.

Я в свое время исследовал [7]) формулированную выше задачу минимального приближения и доказал, между прочим, во-первых, что эта задача всегда имеет решение (либо единственное, либо бесчисленное множество решений), затем — тот основной факт, что *минимальное приближение* ρ (т. е. минимум величины (19)) для системы (17) является вместе с тем минимальным приближением для некоторой конечной подсистемы r уравнений ($1 \leqslant r \leqslant n+1$), взятых из „расширенной системы“ и имеющих линейно зависимые в узком смысле левые части.

Здесь я хочу лишь остановиться на оценке нижней границы минимального приближения ρ при помощи надлежащего обобщения *теоремы Валле Пуссена*. Это обобщение выражается следующим предложением:

Теорема. *Пусть*

$$f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv a_{1i}x_1 + a_{2i}x_2 + \ldots + a_{ni}x_n = l_i \quad (i = 1, 2, \ldots, r) \tag{22}$$

---

[7]) См. мою заметку в Докладах Академии наук СССР, 1935, т. III (VIII), № 8, стр. 343—346, и в особенности мою монографию, указанную в сноске [3]), г).

— подсистема r уравнений $(1 \leqslant r \leqslant n+1)$, *взятых из „расширенной системы" и таких, что левые части их линейно зависимы в узком смысле. Пусть* $k_1, k_2, \ldots, k_r$ *— такая система r постоянных, что равенство* (21) *выполняется тождественно. Отклонения, соответствующие рассматриваемым r уравнениям, пусть будут*

$$\Delta_i = \Delta_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \quad (i = 1, 2, \ldots, r). \tag{23}$$

Допустим, наконец, что для некоторой системы значений неизвестных $x_1 = \bar{x}_1, x_2 = \bar{x}_2, \ldots, x_n = \bar{x}_n$, *полагая* $\Delta_i(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n) = \bar{\Delta}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$, *имеем*

$$\operatorname{sgn} \bar{\Delta}_1 \cdot \operatorname{sgn} k_1 = \operatorname{sgn} \bar{\Delta}_2 \cdot \operatorname{sgn} k_2 = \ldots = \operatorname{sgn} \bar{\Delta}_r \cdot \operatorname{sgn} k_r. \tag{24}$$

Тогда минимальное приближение ρ *системы уравнений* (17) *не может быть меньше величины*

$$\min \{ |\bar{\Delta}_1|, |\bar{\Delta}_2|, \ldots, |\bar{\Delta}_r| \} = \mu. \tag{25}$$

Быть равным этой величине оно может лишь в случае

$$|\bar{\Delta}_1| = |\bar{\Delta}_2| = \ldots = |\bar{\Delta}_r|.$$

Для доказательства исходим из соотношения

$$k_1\Delta_1 + k_2\Delta_2 + \ldots + k_r\Delta_r = k_1 l_1 + k_2 l_2 + \ldots + k_r l_r, \tag{26}$$

которое вытекает из (18) и (21), каковы бы ни были значения неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Если напишем это соотношение один раз для $x_1 = \bar{x}_1, x_2 = \bar{x}_2, \ldots, x_n = \bar{x}_n$, другой раз для системы значений $x_1 = x_{10}$, $x_2 = x_{20}, \ldots, x_n = x_{n0}$, которая является решением задачи минимального приближения, то будем иметь, вычитая почленно и полагая для сокращения $\Delta_i(x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{n0}) = \Delta_{i0}$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$:

$$\sum_{i=1}^{r} k_i (\bar{\Delta}_i - \Delta_{i0}) = 0. \tag{27}$$

Если бы теорема была несправедливой, то левая часть представляла бы собой сумму некоторого числа r' $(1 \leqslant r' \leqslant r)$ отличных от нуля слагаемых одного и того же знака, что невозможно.

Доказанное таким образом предложение обнимает, как частные случаи, формулировки теоремы Валле Пуссена в классических случаях аппроксимации непрерывных функций $f(x)$ посредством полиномов или конечных тригонометрических выражений. Но оно равным образом применимо к разнообразным аналогичным задачам, выходящим за рамки упомянутых классических случаев, как то к задаче аппроксимации разрывных функций или функций нескольких переменных и т. д. Мы не будем здесь останавливаться на частных формулировках [8]), которые отсюда получаются.

Заметим в заключение, что, когда одно из количеств $a_1, a_2, \ldots, a_n$ остается постоянным, например, тождественно равным единице (это имеет место в наиболее часто встречающихся случаях, в частности — в упомя-

[8]) См. сноску [3]), г).

нутых классических случаях аппроксимации функций), то величина μ (25) может быть заменена величиною $\frac{1}{2}(\mu' + \mu'')$, аналогичною той, которая была определена в п. 1, что дает, вообще, более точную нижнюю границу для ρ.

4. Рассмотрения п. 2 дают повод к нескольким замечаниям относительно использования формулы (9) в некоторых вопросах, касающихся связи между оценкой наилучшего приближения функции $f(x)$ посредством полинома степени $\leqslant n$ и известными „структурными свойствами", характеризующими течение данной функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$. Мы начнем с установления одной вспомогательной теоремы, которая может представить некоторый интерес и сама по себе. Затем мы отметим, в качестве примеров приложений упомянутого рода, весьма простые доказательства некоторых важных предложений, принадлежащих С. Н. Бернштейну и Валле Пуссену.

Заметим прежде всего, что знаменатель $\chi(x_0, x_1, \ldots, x_{n+1})$ в формуле (9) является вполне определенной функцией совокупности $n+2$ точек $x_0 < x_1 < \ldots < x_{n+1}$, в то время как числитель $f(x_0, x_1, \ldots, x_{n+1})$ зависит, сверх того, от выбора самой функции $f(x)$. Согласно хорошо известной формуле теории конечных разностей [9]), имеем

$$(28) \qquad f(x_0, x_1, \ldots, x_{n+1}) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \quad (a \leqslant x_0 < \xi < x_{n+1} \leqslant b).$$

Если взять *частный случай* $f(x) = x^{n+1}$, то это выражение обращается в *постоянную*, равную единице. Для этого случая, исследованного Чебышевым [10]), хорошо известны, с одной стороны, значение наилучшего приближения

$$\rho = \frac{1}{2^n}\left(\frac{b-a}{2}\right)^{n+1}$$

на отрезке $[a, b]$ посредством полинома степени $\leqslant n$, с другой же стороны — множество $n+2$ точек, на котором наилучшее приближение ρ_0 функции $f(x) = x^{n+1}$ имеет в точности то же значение, а именно „точки максимального отклонения Чебышева":

$$(29) \quad x_i = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}\cos\frac{(n+1-i)\pi}{n+1} \quad (i = 0, 1, 2, \ldots, n+1).$$

На всяком другом множестве $n+2$ точек отрезка $[a, b]$ наилучшее приближение той же функции $f(x) = x^{n+1}$ будет наверное меньше [11]), между тем как числитель в формуле (9) остается постоянным и равным единице. Таким образом мы приходим к следующему предложению, выражающему

---

[9]) N. E. Nörlund, Vorlesungen über Differenzenrechnung, Berlin, 1924; В. Л. Гончаров, Теория интерполирования и приближения функций, ГТТИ, 1934.

[10]) П. Л. Чебышев, Теория механизмов, известных под именем параллелограммов, Сочинения, т. I, стр. 111—143; Вопросы о наименьших величинах, связанные с приближенным представлением функций, там же, стр. 273—378.

[11]) Ср., например, Ch. de la Vallée Poussin, Leçons sur l'approximation etc., n° 64.

экстремальное свойство множества точек максимального отклонения Чебышева:

Теорема. *Функция совокупности* $n+2$ *точек* $x_0, x_1, \ldots, x_{n+1}$

$$|\chi(x_0, x_1, \ldots, x_{n+1})| = \sum_{i=0}^{n+1} \left| \frac{(-1)^i}{(x_i - x_0)\ldots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\ldots(x_i - x_{n+1})} \right|, \tag{30}$$

где $a \leqq x_0 < x_1 < \ldots < x_{n+1} \leqq b$, *достигает своего наименьшего значения для системы значений* (29), *т. е. для множества точек максимального отклонения Чебышева — и ни для какого другого. Это минимальное значение равно* $\frac{2^{2n+1}}{(b-a)^{n+1}}$. *Таким образом всегда имеем неравенство*

$$|\chi(x_0, x_1, \ldots, x_{n+1})| \geqq \frac{2^{2n+1}}{(b-a)^{n+1}}, \tag{31}$$

причем соотношение равенства имеет место только для значений (29).

Следствие I. *Если функция* $f(x)$ *обладает на отрезке* $[a, b]$ *длины* $b - a = 2h$ *производною* $(n+1)$*-го порядка, которая удовлетворяет неравенству*

$$\sup_{a \leqq x \leqq b} |f^{(n+1)}(x)| \leqq M, \tag{32}$$

то, обозначая через $\rho = E_n[f(x)]$ *наилучшее приближение функции* $f(x)$ *на данном отрезке* $[a, b]$ *посредством полинома степени* $\leqq n$, *имеем*

$$E_n[f(x)] \leqq \frac{2M}{(n+1)!}\left(\frac{h}{2}\right)^{n+1}. \tag{33}$$

Это непосредственно вытекает из только что установленной теоремы, если принять во внимание формулы (9) и (28). Мы таким образом получили простое доказательство предложения, принадлежащего С. Н. Бернштейну [12]). Формула (33) является, впрочем, более точной, содержа в числителе множитель 2, вместо множителя 4 в упомянутом предложении Бернштейна [12a]).

Следствие II. *Если на отрезке* $[a, b]$ *длины* $2h$ *имеем*

$$0 < N \leqq |f^{(n+1)}(x)| \leqq M, \tag{34}$$

то

$$\frac{2N}{(n+1)!}\left(\frac{h}{2}\right)^{n+1} \leqq E_n[f(x)] \leqq \frac{2M}{(n+1)!}\left(\frac{h}{2}\right)^{n+1}. \tag{35}$$

---

[12]) С. Н. Бернштейн, а) О наилучшем приближении непрерывных функций посредством многочленов данной степени, Сообщения Харьковского математического общества, сер. 2, т. XIII (1912), стр. 147; б) Leçons sur les propriétés extrémales et la meilleure approximation etc., Paris, 1926, стр. 10.

[12a]) Рукопись этой заметки была сдана редакции настоящего сборника 7 октября 1936 г. Печатание сборника затянулось. Между тем весной 1937 г. вышла новая замечательная монография С. Н. Бернштейна „Экстремальные свойства полиномов и наилучшее приближение непрерывных функций одной вещественной переменной", ч. I, где, между прочим, рассматриваемая формула уже получена (другим методом) с коэфициентом 2.

Доказательство и здесь является непосредственным и получается подобно предыдущему [13]). Это предложение также принадлежит С. Н. Бернштейну (loc. cit.).

Чтобы привести еще один пример, где могут быть использованы предыдущие рассмотрения, отметим весьма простое доказательство одной теоремы Валле Пуссена [14]), которая дает нижнюю границу наименьшего расстояния δ двух соседних точек множества $n+2$ точек

$$x_0 < x_1 < \ldots < x_{n+1}$$

(множество E_0), взятых на отрезке $[a, b]$, когда дано наилучшее приближение ρ_0 на точечном множестве E_0 для некоторой функции $f(x)$, удовлетворяющей условию (32). Здесь для получения результата, найденного Валле Пуссеном, достаточно отбросить в сумме (30) все члены за исключением двух, которые соответствуют смежным точкам x_i, x_{i+1}, таким, что $x_{i+1} - x_i = \delta$. Принимая во внимание (9) и (28), будем иметь, очевидно,

$$\rho_0 < \frac{M}{(n+1)!} \cdot \frac{2}{\delta (b-a)^n}, \tag{36}$$

откуда и получается неравенство Валле Пуссена

$$\delta > \frac{(n+1)!}{(b-a)^n} \cdot \frac{2\rho_0}{M}. \tag{37}$$

---

[13]) Первое из неравенств (35) следует непосредственно из того замечания, что $E_n[f(x)]$, т. е. наилучшее приближение на целом отрезке $[a, b]$, не меньше наилучшего приближения на множестве точек (29), которое составляет часть этого отрезка; второе неравенство (35) не отличается от (33) и связано, разумеется, с тем обстоятельством, что $E_n[f(x)]$ равно наилучшему приближению той же функции $f(x)$ на некотором (неизвестном) множестве $n+2$ точек отрезка $[a, b]$ (ср. loc. cit. [11])).

[14]) Op. cit. [11]), n° 59.

ИССЛЕДОВАНИЯ О БЕСКОНЕЧНЫХ ПОДСТАНОВКАХ.

А. К. Сушкевич (Харьков).

1. В моей работе „Über einen merkwürdigen Typus der verallgemeinerten unendlichen Gruppen“ [1]) я рассмотрел подстановки со счетным множеством символов [2]) (обозначаемых мною номерами $1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$); я разделяю эти подстановки на четыре следующих типа:

1) *Обычные* подстановки, нижние строки которых содержат все номера n и каждый по одному разу, т. е. являются настоящими перемещениями номеров $1, 2, 3, \ldots$

2) *Недостаточные* подстановки, нижние строки которых содержат не все номера n, но каждый входящий туда номер — только один раз. Между этими подстановками я выделяю те, в нижних строках которых отсутствует бесчисленное множество номеров; такие подстановки назовем *абсолютно недостаточными*.

3) *Избыточные* подстановки, нижние строки которых содержат все номера n, при этом некоторые (может случиться, что и все) — по несколько раз (быть может, и бесчисленное множество раз); в случае, если *каждый* номер встречается бесчисленное множество раз, назовем такую подстановку *абсолютно избыточной*.

4) *Смешанные* подстановки, нижние строки которых содержат не все номера, но некоторые номера там встречаются по несколько раз.

В этой моей работе я имею в виду рассмотреть некоторые свойства всех этих подстановок и построить из них обобщенные группы.

Заметим, что произведение двух подстановок одного и того же типа есть подстановка того же самого типа. Произведение некоторой подстановки P на обычную подстановку (поставленную справа или слева) — того же типа, что и подстановка P.

Ассоциативный закон выполнен для умножения наших подстановок. „Тождественная подстановка“ $E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \ldots \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \ldots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ n \end{pmatrix}$ является двусторонней единицей для подстановки каждого из рассмотренных типов:

$$PE = EP = P.$$

2. Теорема. *Все обычные подстановки образуют обычную группу, содержащую своими подгруппами конечные обычные группы всех воз-*

[1]) Записки Харк. матем. т-ва, сер. 4, т. IX (1934), стр. 39—44.

[2]) Я встречал такие подстановки у А. Хаара, Über unendliche kommutative Gruppen, Math. Zeitschr., т. 33 (1931), стр. 129—159, § 1; их рассматривает также О. Шрейер.

можных типов; эту группу можно рассматривать как внешнее предельное множество всех обычных симметрических групп.

Доказательство. Всякая обычная подстановка $A=\binom{n}{a_n}$, очевидно, имеет обратную, тоже обычную подстановку: $A^{-1}=\binom{a_n}{n}$; отсюда уже следует, что группа обычных подстановок — обычная. Эта группа содержит симметрическую группу любой степени m, ибо всякую подстановку m символов можно представить как подстановку счетного множества символов, в которой всякий символ с номером, превосходящим m, переходит сам в себя. А всякая обычная конечная группа является ведь подгруппой некоторой симметрической группы. Последняя часть теоремы следует из того, что наши бесконечные подстановки могут быть рассматриваемы как пределы обычных конечных подстановок.

Обычная бесконечная подстановка может быть разложена на независимые циклы; эти циклы, равно как и их множество, могут быть конечными или бесконечными; бесконечный цикл должен быть непременно открытым с обеих сторон. Порядок подстановки, имеющей хоть один бесконечный цикл, должен быть тоже бесконечным; но если даже все циклы подстановки конечны, то порядок такой подстановки может быть все-таки бесконечным, — именно, если порядки этих циклов не имеют верхней границы. Если же порядки независимых циклов подстановки не превосходят данного конечного числа m, то порядок такой подстановки непременно конечен — он равен общему наименьшему кратному порядков всех циклов.

Пример бесконечного цикла:

$$P=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8&9&10&11&12&\dots\\2&4&1&6&3&8&5&10&7&12&9&14&\dots\end{pmatrix}=$$
$$=(\dots,\ 11,\ 9,\ 7,\ 5,\ 3,\ 1,\ 2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10,\ \dots).$$

Пример подстановки с двумя бесконечными циклами:

$$Q=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8&9&10&11&12&13&14&\dots\\3&6&7&2&1&10&11&4&5&14&15&8&9&18&\dots\end{pmatrix}=$$
$$=(\dots,\ 13,\ 9,\ 5,\ 1,\ 3,\ 7,\ 11,\ \dots)(\dots,\ 12,\ 8,\ 4,\ 2,\ 6,\ 10,\ \dots).$$

Пример подстановки бесконечного порядка, все циклы которой конечны:

$$R=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8&9&10&11&12&\dots\\1&3&2&5&6&4&8&9&10&7&12&13&\dots\end{pmatrix}=$$
$$=(1)\ (2,\ 3)\ (4,\ 5,\ 6)\ (7,\ 8,\ 9,\ 10)\ (11,\ 12,\ 13,\ 14,\ 15)\ \dots$$

3. Теорема. *Всякая обычная подстановка A может быть представлена следующим образом:*

$$A=KL,$$

где K — недостаточная, L — избыточная подстановки; одна из этих обеих подстановок произвольна, другая — при данной первой — может быть выбрана несколькими способами.

Доказательство. Пусть $A=\binom{n}{a_n}$, и положим, что $K=\binom{n}{\alpha_n}$ нам дана; α_1, α_2, α_3, ... — некоторый ряд натуральных чисел (не всех). Построим L следующим образом: символ α_n должен переходить в a_n, а символы, отличные от всех α_n, должны быть произвольным образом сопряжены с символами a_n.

Пусть теперь кроме A нам дана еще подстановка L. Пусть α_1 — один из символов, который в L переходит в a_1, α_2 — один из символов, который в L переходит в a_2, и т. д. Тогда $K=\binom{n}{\alpha_n}$, и наша теорема доказана.

Пример. Пусть

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8&9&10&11&12\ldots\\2&3&1&5&6&7&4&9&10&11&12&8\ldots\end{pmatrix}=$$
$$=(1,2,3)\,(4,5,6,7)\ldots,$$
$$K=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\ldots\\3&4&5&6&7&8&9&10\ldots\end{pmatrix}=\binom{n}{n+2};$$

тогда

$$L=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8&9&10&11&12\ldots\\\alpha&\beta&2&3&1&5&6&7&4&9&10&11\ldots\end{pmatrix},$$

где α и β произвольны.

Замечание. Если $A=KL$ (где A — обычная, K — недостаточная, L — избыточная подстановки), а B — любая обычная подстановка, то

$$(1)\qquad K(LA^{-1}B)=(BA^{-1}K)\,L=B=(BK)\,(LA^{-1})=(A^{-1}K)\,(LB).$$

Четыре произведения в (1) имеют первыми сомножителями недостаточные, а вторыми — избыточные подстановки.

Теорема. *Все недостаточные подстановки образуют обобщенную левую полугруппу; все избыточные подстановки образуют обобщенную правую полугруппу* [3]).

Доказательство. Групповое свойство и ассоциативный закон выполнены для подстановок этих типов; остается проверить закон однозначной обратимости. Пусть

$$(2)\qquad K_1K=K_2K,$$

где K_1, K_2 и K — недостаточные подстановки; по предыдущей теореме можно найти избыточную подстановку L так, чтобы KL стало равным тождественной подстановке E, и (2) даст

$$K_1KL=K_2KL,\quad K_1E=K_2E,\quad K_1=K_2.$$

Аналогично можно проверить правый закон однозначной обратимости для избыточных подстановок.

---

[3]) Я называю „обобщенной левой полугруппой“ всякую обобщенную ассоциативную группу с левым законом однозначной обратимости; аналогично определяется „обобщенная правая полугруппа“; см. мою работу „Sur quelques propriétés des semigroupes généralisés“, Записки Ин-та мат. и мех. при Харьк. ун-те, сер. 4, т. 13, вып. 1.

4. Пусть K — любая недостаточная, а L — избыточная подстановки. Подстановка $P=KL$ вообще смешанная; действительно, так как нижняя строка K содержит только часть всех символов, то и нижняя строка P будет содержать вообще только часть всех символов; с другой стороны, так как нижняя строка L содержит одинаковые символы, то можно ожидать, что и нижняя строка P будет содержать одинаковые символы.

Пример. $K=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8&9&\dots\\1&3&5&7&9&11&13&15&17&\dots\end{pmatrix}$,

$$L=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8&9&10&11&12&\dots\\4&3&2&1&4&3&2&1&8&7&6&5&\dots\end{pmatrix},$$

$$P=KL=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8&9&10&\dots\\4&2&4&2&8&6&8&6&12&10&\dots\end{pmatrix}.$$

Но может случиться, что подстановка KL будет недостаточной или избыточной, или даже обычной. Легко видеть, что

1) KL недостаточна, если символы нижней строки K не сопряжены в L (т. е. никакая их пара не сопряжена)[4]) и, кроме того, имеются символы, которые в L не сопряжены ни с какими нижними символами подстановки K.

2) KL избыточна, если каждый символ сопряжен в L по крайней мере с одним из нижних символов K и в нижней строке K имеются символы, сопряженные друг с другом в L.

3) KL обычна, если всякий символ сопряжен в L с одним и только с одним нижним символом K, а нижние символы в K не сопряжены в L друг с другом.

Но подстановка $Q=LK$ всегда смешанная, ибо она не может иметь иных нижних символов, кроме тех, которые входят в нижнюю строку K, а с другой стороны, символы, сопряженные в L, остаются сопряженными и в Q.

5. Лемма. *Пусть* $A_{\varkappa\lambda}$ $(\varkappa=1, 2, \dots, r;\ \lambda=1, 2, \dots, s)$ *rs обычных подстановок (равных или неравных),* K_1 *абсолютно недостаточна,* L *абсолютно избыточна,* $K_1L_1=A_{11}$ *(по первой теореме* п. 3; *легко видеть, что если* K_1 *абсолютно недостаточна, то* L_1 *можно выбрать абсолютно избыточной); можно всегда выбрать абсолютно недостаточные подстановки* $K_2, \dots, K_r$ *и абсолютно избыточные подстановки* $L_2, \dots, L_s$ *так, чтобы выполнялись соотношения*

$$K_\varkappa L_\lambda = A_{\varkappa\lambda} \quad (\varkappa=1, 2, \dots, r;\ \lambda=1, 2, \dots, s). \tag{3}$$

Доказательство. Обозначим $A_{\varkappa\lambda}=\begin{pmatrix}n\\ a_n^{(\varkappa\lambda)}\end{pmatrix}$, $K_\varkappa=\begin{pmatrix}n\\ \alpha_n^{(\varkappa)}\end{pmatrix}$; $a_n^{(\varkappa\lambda)}$ представляют перестановки всех символов n; $\alpha_n^{(\varkappa)}$ образуют только часть всей совокупности символов n. Обозначим через $\beta_n^{(\varkappa)}$ $(n=1, 2, 3, \dots)$ дополнительное множество к $\alpha_n^{(\varkappa)}$, т. е. множество символов n, которых нет в множестве $\alpha_n^{(\varkappa)}$; так как $K_\varkappa$ абсолютно недостаточны, то все мно-

[4]) „Сопряженными" символами в данной подстановке я называю те различные символы, которые переходят в один и тот же символ.

жества $\beta_n^{(\varkappa)}$ ($\varkappa = 1, 2, \ldots, r$) бесконечны. Подстановки L_λ должны иметь следующий вид:

$$L_\lambda = \begin{pmatrix} \alpha_n^{(\varkappa)}, & \beta_n^{(\varkappa)} \\ a_n^{(\varkappa\lambda)}, & b_n^{(\varkappa\lambda)} \end{pmatrix}, \tag{4}$$

где $b_n^{(\varkappa\lambda)}$ означает символы 1, 2, 3, ..., расположенные в некотором порядке. То-есть мы должны доказать, что существует (для всякого $\lambda = 1, 2, \ldots, s$) такая избыточная подстановка L_λ, которую можно представить в r разных видах (4) (при $\varkappa = 1, 2, \ldots, r$), так что соотношения (3) окажутся выполненными.

Пока мы имеем еще только подстановки $K_1 = \begin{pmatrix} n \\ \alpha_n^{(1)} \end{pmatrix}$ и $L_1 = \begin{pmatrix} \alpha_n^{(1)}, & \beta_n^{(1)} \\ a_n^{(1)}, & b_n^{(1)} \end{pmatrix}$, удовлетворяющие условию $K_1 L_1 = A_{11}$. Переставим теперь в L_1 столбцы так, чтобы нижняя строка в L_1 приняла вид $a_n^{(\varkappa 1)}$; $b_n^{(\varkappa 1)}$; в таком случае верхняя строка в L_1 примет какой-то вид $\alpha_n^{(\varkappa)}$, $\beta_n^{(\varkappa)}$, т. е. мы получим $L_1 = \begin{pmatrix} \alpha_n^{(\varkappa)}, & \beta_n^{(\varkappa)} \\ a_n^{(\varkappa 1)}, & b_n^{(\varkappa 1)} \end{pmatrix}$.

Теперь *определим:* $K_\varkappa = \begin{pmatrix} n \\ \alpha_n^{(\varkappa)} \end{pmatrix}$. Этой формулой $K_\varkappa$ вполне определяется. Строим, далее, L_λ следующим образом:

$$L_\lambda = \begin{pmatrix} \alpha_n^{(1)}, & \beta_n^{(1)} \\ a_n^{(1\lambda)}, & b_n^{(1\lambda)} \end{pmatrix}; \tag{4a}$$

мы тогда действительно получим $K_1 L_\lambda = A_{1\lambda}$. Но формулой (4а) L_λ еще не вполне определяется, поскольку $b_n^{(1\lambda)}$ остается произвольным. Мы используем этот произвол следующим образом: один из символов, соответствующих в L_1 символу $a_n^{(\varkappa 1)}$, сделаем соответствующим в L_λ символу $a_n^{(\varkappa\lambda)}$ ($\varkappa = 1, 2, \ldots, r$; $n = 1, 2, \ldots$); это возможно, ибо все L_λ абсолютно избыточны; а этот символ, соответствующий в L_1 символу $a_n^{(\varkappa 1)}$, мы и обозначаем через $\alpha_n^{(\varkappa)}$. При этом условии (3) окажется выполненным. Кроме того, мы можем достигнуть того, чтобы все $K_\varkappa$ (а также и все L_λ) были различными, ибо L_λ абсолютно избыточны (а $K_\varkappa$ абсолютно недостаточны).

6. Пусть $\mathfrak{G}$ — обычная, конечная или бесконечная, группа, или обычная полугруппа, образованная из бесконечных обычных подстановок; E — тождественная подстановка. Разложим E по первой теореме п. 3: $E = KL$, где K недостаточна, L избыточна. Образуем совокупность $L\mathfrak{G}K$; это — совокупность смешанных подстановок; докажем, что она — группа или полугруппа, просто изоморфная с $\mathfrak{G}$. Действительно, пусть

$$\mathfrak{G} = E + A + B + C + \ldots;$$

тогда

$$L\mathfrak{G}K = LK + LAK + LBK + LCK + \ldots$$

Установим между $\mathfrak{G}$ и $L\mathfrak{G}K$ следующее соответствие:

$$\begin{array}{lll} \text{пусть } A & \text{соответствует} & LAK, \\ B & \text{„} & LBK, \quad \text{и т. д.;} \\ \text{тогда } AB & \text{„} & L(AB)K = LAK \cdot LBK, \end{array}$$

ибо $KL = E$ — единица для всех наших подстановок. В частности, $E_1 = LK$, идемпотентная подстановка, — единица для группы $L\mathfrak{G}K$, в чем нетрудно убедиться. Что изоморфизм между группами $\mathfrak{G}$ и $L\mathfrak{G}K$ простой, следует из того, что при $A \neq B$ также и $LAK \neq LBK$ (иначе мы имели бы $KLAKL = KLBKL$, т. е. $A = B$); обратное — очевидно.

Заметим, что, если $\mathfrak{G}$ полугруппа, то E может и не входить в $\mathfrak{G}$.

Обратно, пусть $\mathfrak{G}_1 = E_1 + A_1 + B_1 + C_1 + \ldots$ — обычная группа, образованная из смешанных подстановок; E_1 — единица этой группы. Обозначив через α_n нижние символы в E_1, мы заключим из равенства $E_1^2 = E_1$, что каждый из символов α_n в E_1 соответствует самому себе, т. е. E_1 имеет следующий вид:

$$E_1 = \begin{pmatrix} \alpha_n, & \beta_n \\ \alpha_n, & \alpha_n' \end{pmatrix}, \tag{5}$$

где β_n — „дополнительная“ совокупность к α_n (т. е. α_n и β_n образуют совокупность *всех* символов 1, 2, 3, ..., и каждый символ n входит туда только *один* раз), а α_n' — те же символы α_n, только в ином порядке. Кроме того, должно быть

$$A_1E_1 = E_1A_1 = A_1$$

для всякой подстановки A_1 из $\mathfrak{G}$. Это показывает, что нижние символы в A_1 не могут быть отличными от α_n и что символы, сопряженные в E_1, сопряжены также и в A_1. Но всякая подстановка A_1 из $\mathfrak{G}$ должна иметь обратную подстановку A_1^{-1}, так что $A_1A_1^{-1} = A_1^{-1}A_1 = E_1$; это показывает, что E_1 не может иметь иных нижних символов, кроме тех, которые входят в нижнюю строку A_1; сверх того, символы, сопряженные в A_1, сопряжены и в E_1. Таким образом все подстановки из $\mathfrak{G}_1$ имеют одни и те же нижние символы α_n и одни и те же сопряжения, т. е. относительно символов α_n подстановки из $\mathfrak{G}_1$ обычные. Положим теперь

$$K = \begin{pmatrix} n \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n' \\ \alpha_n' \end{pmatrix}; \quad L = \begin{pmatrix} \alpha_n, & \beta_n \\ n, & n' \end{pmatrix};$$

очевидно, что K недостаточна, а L избыточна; имеем $LK = E_1$, $KL = E$ (обычная тождественная подстановка). Образуем теперь комплекс

$$\mathfrak{G} = K\mathfrak{G}_1L = KE_1L + KA_1L + KB_1L + \ldots;$$

$KE_1L = KL = E$; все подстановки $A = KA_1L$, $B = KB_1L$, ... обычны. Можно убедиться, как и выше, что $\mathfrak{G}$ — обычная группа, просто изоморфная с $\mathfrak{G}_1$. Итак, имеем следующий результат:

Теорема. *Если $\mathfrak{G}$ — обычная группа или полугруппа обычных подстановок и $E = KL$ — разложение ее единицы (тождественной подстановки) E на недостаточную (K) и избыточную (L) подстановки, то $L\mathfrak{G}K$ — тоже обычная группа или полугруппа, образованная из*

смешанных подстановок, просто изоморфная с $\mathfrak{G}$. *Обратно, всякая обычная группа смешанных подстановок может быть получена таким образом; все подстановки такой группы имеют одни и те же сопряжения и одни и те же нижние символы.*

7. Пусть опять $\mathfrak{G} = A + B + C + \ldots$ — обычная группа (конечная или бесконечная) или полугруппа, образованная из обычных подстановок. Пусть по первой теореме п. 3

$$E = KL_1 = KL_2 = KL_3 = \ldots,$$

где K — недостаточная подстановка, а L_1, L_2, L_3, ... избыточны (в конечном или бесконечном множестве). Образуем комплекс

$$\mathfrak{H} = L_1\mathfrak{G}K + L_2\mathfrak{G}K + L_3\mathfrak{G}K + \ldots \tag{6}$$

и докажем, что это — левая [5]) группа или полугруппа (в зависимости от того, группа ли или полугруппа $\mathfrak{G}$). По теореме п. 6 все $L_\lambda\mathfrak{G}K$ — обычные группы (или полугруппы), просто изоморфные с $\mathfrak{G}$ и попарно без общих элементов, ибо их единицы различны: единица в $L_\lambda\mathfrak{G}K$ есть $E_\lambda = L_\lambda K$, а из равенства $L_\lambda K = L_\mu K$ следует $L_\lambda KL_1 = L_\mu KL_1$, $L_\lambda E = L_\mu E$, $L_\lambda = L_\mu$, т. е. $\lambda = \mu$. Заметим, что в случае полугруппы E_λ (для всякого λ) может и не входить в $L_\lambda\mathfrak{G}K$. Далее, если A и B — две любые подстановки из $\mathfrak{G}$, то мы имеем

$$L_\lambda AK \cdot L_\mu BK = L_\lambda (AB)K. \tag{7}$$

Структура (6) и свойство (7) совокупности $\mathfrak{H}$ показывают, что $\mathfrak{H}$ — левая группа или полугруппа [6]).

Обратно, пусть $\mathfrak{H}$ — левая *группа*, образованная нашими бесконечными подстановками. Очевидно, что подстановки из $\mathfrak{H}$ не могут быть обычными, так как эти последние могут образовывать только обычные группы и полугруппы. Но так как каждая подстановка из $\mathfrak{H}$ принадлежит обычной группе, то на основании результатов п. 6 заключаем, что такая подстановка, если она не обычная, может быть только смешанной. Группа $\mathfrak{H}$ образована, таким образом, из смешанных подстановок. Пусть

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{G}_1 + \mathfrak{G}_2 + \mathfrak{G}_3 + \ldots,$$

где $\mathfrak{G}_\lambda$ — обычные, просто изоморфные друг другу группы попарно без общих элементов. Пусть E_λ — единица из $\mathfrak{G}_\lambda$; разложим E_1 (как в конце п. 6): $E_1 = L_1K$, K недостаточна, L_1 избыточна, $KL_1 = E$ (тождественная подстановка). Имеем $E_2 = E_2E_1 = (E_2L_1)K$; положим $E_2L_1 = L_2$; легко убедиться, что L_2 тоже избыточна; кроме того, $KL_2 = E$, ибо E_2 имеет

---

[5]) Я называю „левой группой" обобщенную ассоциативную группу, для которой верен *левый* закон *неограниченной* и *однозначной* обратимости; — „левой полугруппой", — если верен левый закон только *однозначной* обратимости. Об этих обобщениях см. мои работы Über die endlichen Gruppen ohne das Gesetz der eindeutigen Umkehrbarkeit, Math. Ann., т. 99 (1928), стр. 30—50, и Über eine Verallgemeinerung der Semigruppen, Записки Харк. мат. т-ва, сер. 4, т. XII (1936), стр. 89—96; см. также уже цитированную работу Sur quelques propriétés des semigroupes généralisés.

[6]) Это следует из результатов моих цитированных выше работ.

те же нижние символы, что и E_1. Пусть A_1 — какой-нибудь элемент из $\mathfrak{G}_1$, а $E_2A_1 = A_2$ — соответствующий элемент из $\mathfrak{G}_2$; имеем

$$KA_2L_2 = KE_2A_1E_2L_1 = KL_2 \cdot KA_1L_1 = KA_1L_1,$$

ибо $KL_2 = E$, $A_1E_2 = A_1E_1E_2 = A_1E_1 = A_1$; это показывает, что

$$K\mathfrak{G}_1L_1 = K\mathfrak{G}_2L_2 = \mathfrak{H}$$

одна и та же обычная группа из обычных подстановок.

Обозначим вообще $E_\lambda L_1 = L_\lambda$; тогда $L_\lambda K = E_\lambda$, $K\mathfrak{G}_\lambda L_\lambda = \mathfrak{H}$. Итак, имеем следующий результат:

Теорема. *Если $\mathfrak{G}$ — обычная группа или полугруппа из обычных подстановок, и $E = KL_\lambda$ $(\lambda = 1, 2, \ldots)$, где K недостаточна, а L_λ избыточны, то комплекс* (6) *есть левая группа или полугруппа из смешанных подстановок. Обратно, всякая левая группа, образованная бесконечными подстановками, может быть получена таким образом.*

Аналогичная теорема имеет место и для правых групп (и полугрупп); там мы берем такие разложения E: $E = K_1L = K_2L = \ldots$, и вместо формулы (6) получаем

$$\mathfrak{H}' = L\mathfrak{G}K_1 + L\mathfrak{G}K_2 + \ldots \tag{6'}$$

8. Пусть $\mathfrak{G}$ попрежнему — обычная группа или полугруппа обычных подстановок, и пусть даны еще разложения

$$E = K_1L_\lambda = K_\varkappa L_1 \quad (\varkappa = 1, 2, \ldots, r;\ \lambda = 1, 2, \ldots, s).$$

По лемме п. 5 можно выбрать $K_\varkappa$ абсолютно недостаточными и L_λ — абсолютно избыточными так, что произведения $K_\varkappa L_\lambda$ $(\varkappa = 2, \ldots, r;\ \lambda = 2, \ldots, s)$ будут обычными, заранее заданными подстановками, например, из $\mathfrak{G}$. Образуем следующий комплекс:

$$\mathfrak{K} = \sum_{\varkappa=1}^{r} \sum_{\lambda=1}^{s} L_\lambda \mathfrak{G} K_\varkappa. \tag{8}$$

Этот комплекс — обобщенная группа (или полугруппа), которую я назвал „группою типа ядра“ [7]); можно представить $\mathfrak{K}$ в следующих видах: $\mathfrak{K} = \sum_{\varkappa=1}^{r} \mathfrak{A}_\varkappa = \sum_{\lambda=1}^{s} \mathfrak{B}_\lambda$, где $\mathfrak{A}_\varkappa = \sum_{\lambda=1}^{s} L_\lambda \mathfrak{G} K_\varkappa$ — левые группы (или полугруппы), а $\mathfrak{B}_\lambda = \sum_{\varkappa=1}^{r} L_\lambda \mathfrak{G} K_\varkappa$ — правые группы (или полугруппы). $\mathfrak{G}_{\varkappa\lambda} = L_\lambda \mathfrak{G} K_\varkappa$ — обычные группы (или полугруппы); в случае групп все $\mathfrak{G}_{\varkappa\lambda}$ просто изоморфны друг другу; в случае полугрупп изоморфизма может и не быть. Это все можно доказать совершенно тем же методом, что и примененный мною в работах Über die Matrizendarstellung der verallgemeinerten Gruppen (Записки Харк. мат. т-ва, сер. 4, т. VI) и Über eine Verallgemeinerung der Semigruppen (цитирована в п. 7). Обычные подстановки играют здесь роль неособенных матриц порядка n, недостаточные и избыточные подстановки — роль прямоугольных матриц, а смешанные подстановки — роль особенных матриц m-го порядка и ранга $n < m$. Из п. 5 можно

[7]) См. мои работы, цитированные в п. 7.

заключить, что всякая конечная группа типа ядра может быть представлена изложенным выше методом при помощи бесконечных смешанных подстановок.

Если число r или s или оба становятся бесконечными, то лемма п. 5 остается верной, так как мы выбираем $K_\varkappa$ и L_λ соответственно *абсолютно* недостаточными и избыточными. Поэтому результаты данного параграфа верны и тогда, когда совокупности подстановок $K_\varkappa$ или подстановок L_λ являются *счетно* бесконечными.

О СОПРЯЖЕННЫХ ЭЛЕМЕНТАХ В КОНЕЧНЫХ ГРУППАХ.

В. К. Туркин (Москва).

В своей работе „О квазинормализаторах элементов конечных групп“ [1]) автор настоящей работы ввел понятие о квазинормализаторе элемента конечной группы для случая, когда порядок этого элемента является степенью простого числа. Пользуясь понятием квазинормализатора, автор получил ряд теорем о группах конечного порядка. В настоящей работе автор обобщает понятие квазинормализатора на случай элемента произвольного конечного порядка и доказывает некоторые новые теоремы о сопряженных элементах в конечных группах.

Пусть A есть элемент порядка h группы $\mathfrak{G}$ и пусть r есть некоторый делитель числа h. Мы будем называть квазинормализатором элемента A по модулю r совокупность элементов X группы $\mathfrak{G}$, для которых выполняется условие

$$XAX^{-1} = A^m, \quad m \equiv 1 \pmod{r}$$

(в работе автора [1]) разобран случай, когда h, а следовательно, и r являются степенью простого числа).

Нетрудно доказать, что квазинормализатор является группой (подгруппой данной группы $\mathfrak{G}$). Действительно, из равенств

$$X_1AX_1^{-1} = A^{m_1}, \quad m_1 \equiv 1 \pmod{r},$$
$$X_2AX_2^{-1} = A^{m_2}, \quad m_2 \equiv 1 \pmod{r}$$

следует равенство

$$(X_2X_1)A(X_2X_1)^{-1} = X_2X_1AX_1^{-1}X_2^{-1} = X_2A^{m_1}X_2^{-1} = (X_2AX_2^{-1})^{m_1} = A^{m_1m_2},$$

где

$$m_1m_2 \equiv 1 \pmod{r}.$$

Следовательно, произведение двух элементов квазинормализатора также является элементом квазинормализатора. Далее, если X есть элемент квазинормализатора, то X^{-1} также содержится в этом квазинормализаторе.

Квазинормализатор элемента A по модулю r мы будем обозначать через $\mathfrak{N}(A, r)$. В работе [1]) квазинормализатор элемента A порядка p^k по модулю p^i $(i \leqslant k)$ обозначался через $\mathfrak{N}_A^{(i)}$; при обозначениях, употребляемых в этой работе, этот квазинормализатор запишется как $\mathfrak{N}(A, p^i)$.

---

[1]) Доклады Академии наук СССР, т. III (XII) (1936), № 8; подробное изложение содержится в работе, печатающейся в настоящее время в Математическом сборнике.

Пусть A есть элемент порядка h, r — делитель числа h и s — делитель числа r. Всякий элемент, входящий в $\mathfrak{N}(A, r)$, содержится также в $\mathfrak{N}(A, s)$. Следовательно, $\mathfrak{N}(A, r)$ или совпадает с $\mathfrak{N}(A, s)$, или является подгруппой этой группы. Если $\mathfrak{N}(A, r) \neq \mathfrak{N}(A, s)$, то, как легко доказать, $\mathfrak{N}(A, r)$ является нормальным делителем группы $\mathfrak{N}(A, s)$, причем дополнительная группа $\mathfrak{N}(A, s)/\mathfrak{N}(A, r)$ — абелева.

В работе[1]) доказана следующая основная теорема о квазинормализаторах элементов порядка, равного степени простого числа:

Пусть A есть элемент порядка p^k (p — простое число) некоторой группы. Если $\mathfrak{N}(A, p^\lambda) \neq \mathfrak{N}(A, p^{\lambda+1})$, то $\mathfrak{N}(A, p^{\lambda+2})$ есть подгруппа индекса p группы $\mathfrak{N}(A, p^{\lambda+1})$. Исключение может иметь место лишь в случае $p=2$, $\lambda=1$.

Мы докажем сейчас следующее обобщение этой теоремы на случай квазинормализатора элемента произвольного порядка:

Теорема I. *Пусть A есть элемент порядка h некоторой группы и пусть h делится на $\lambda\mu r$, где λ, μ, r — целые числа, причем r делится на $\lambda\mu$. Тогда, если $\mathfrak{N}(A, r) \neq \mathfrak{N}(A, \lambda r)$, то $\mathfrak{N}(A, \lambda\mu r)$ есть подгруппа группы $\mathfrak{N}(A, \lambda r)$ индекса, делящего μ.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{N}(A, r) \neq \mathfrak{N}(A, \lambda r)$. Разложим группу $\mathfrak{N}(A, r)$ по модулю $\mathfrak{N}(A, \lambda r)$ (очевидно, что $\mathfrak{N}(A, \lambda r)$ является подгруппой группы $\mathfrak{N}(A, r)$). Каждая смежная система такого разложения будет состоять из элементов X, для которых выполняется условие

$$XAX^{-1} = A^m, \quad m \equiv 1 + kr \pmod{\lambda r},$$

где k есть некоторое целое число, удовлетворяющее условию $0 \leqslant k < \lambda$. Предположим, что $\mathfrak{N}(A, \lambda r) = \mathfrak{N}(A, \lambda\mu r)$. Тогда для любого элемента X, входящего в $\mathfrak{N}(A, r)$ и не содержащегося в $\mathfrak{N}(A, \lambda r)$, из справедливости сравнения

$$m \equiv 1 + kr \pmod{\lambda r}$$

будет вытекать справедливость сравнения

$$m \equiv 1 + k'r \pmod{\lambda\mu r},$$

где k' не делится на λ.

Пусть X есть любой элемент группы $\mathfrak{N}(A, r)$, не входящий в группу $\mathfrak{N}(A, \lambda r)$. Из формулы

$$XAX^{-1} = A^m, \quad m \equiv 1 + k'r \pmod{\lambda\mu r}$$

вытекает справедливость формулы

$$X^\mu AX^{-\mu} = A^{m^\mu}, \quad m^\mu \equiv (1 + k'r)^\mu \pmod{\lambda\mu r}.$$

Так как по условиям теоремы I r делится на $\lambda\mu$, то мы получаем

$$X^\mu AX^{-\mu} = A^{m^\mu}, \quad m^\mu \equiv 1 + \mu k'r \pmod{\lambda\mu r}.$$

Но, так как

$$X^{\mu} < \mathfrak{N}(A, \lambda\mu r),$$

то получаем, что k' делится на λ, чего быть не может. Таким образом доказано, что в условиях теоремы I $\mathfrak{N}(A, \lambda r) \neq \mathfrak{N}(A, \lambda\mu r)$.

Остается доказать, что индекс подгруппы $\mathfrak{N}(A, \lambda\mu r)$ относительно группы $\mathfrak{N}(A, \lambda r)$ делит μ. Пусть

$$\mu = p_1 p_2 \dots p_n,$$

где p_i — простые числа (разумеется, не обязательно различные). Рассмотрим последовательность

$$\mathfrak{N}(A, \lambda r), \quad \mathfrak{N}(A, \lambda p_1 r), \quad \mathfrak{N}(A, \lambda p_1 p_2 r), \quad \dots, \quad \mathfrak{N}(A, \lambda\mu r).$$

Пусть, например, $\mathfrak{N}(A, \lambda r) \neq \mathfrak{N}(A, \lambda p_1 r)$. Разложим группу $\mathfrak{N}(A, \lambda r)$ по модулю $\mathfrak{N}(A, \lambda p_1 r)$. Каждая смежная система этого разложения будет состоять из элементов X группы $\mathfrak{N}(A, \lambda r)$, для которых выполняется условие

$$XAX^{-1} = A^m, \quad m \equiv 1 + k\lambda r \pmod{\lambda p_1 r},$$

где k — одно из чисел ряда $0, 1, 2, \dots, p_1 - 1$. Очевидно, индекс подгруппы $\mathfrak{N}(A, \lambda p_1 r)$ относительно группы $\mathfrak{N}(A, \lambda r)$ равен p_1. Совершенно так же можно доказать, что если $\mathfrak{N}(A, \lambda p_1 r) \neq \mathfrak{N}(A, \lambda p_1 p_2 r)$, то индекс подгруппы $\mathfrak{N}(A, \lambda p_1 p_2 r)$ относительно группы $\mathfrak{N}(A, \lambda p_1 r)$ равен p_2, и т. д. Мы получаем, что индекс подгруппы $\mathfrak{N}(A, \lambda\mu r)$ относительно группы $\mathfrak{N}(A, \lambda r)$ делит число $p_1 p_2 \dots p_n = \mu$. Таким образом теорема I доказана.

В работе[1]) автором была доказана следующая теорема:

Пусть $\mathfrak{G}$ есть группа порядка $p^{\alpha} n$ (p — простое число, n не делится на p) и пусть A есть элемент порядка p^k этой группы. Если в $\mathfrak{G}$ содержится элемент X, удовлетворяющий условию

$$XAX^{-1} = A^m, \quad m \equiv 1 + p^{\lambda} \pmod{p^{\lambda+1}},$$

то $p^k \leqslant \sqrt{p^{\alpha+\lambda}}$, если $p > 2$ или $\lambda > 1$.

Мы докажем сейчас следующую более общую теорему:

Теорема II. *Пусть A есть элемент порядка $h = p^{\alpha} n$ группы $\mathfrak{G}$ и пусть $r = p^{\beta} v$ есть некоторый делитель числа h (p — простое число; $\beta < \alpha$; n, v не делятся на p). Если в группе $\mathfrak{G}$ имеется элемент X, для которого*

$$XAX^{-1} = A^m, \quad m \equiv 1 + r \pmod{p^{\beta+1} v},$$

то порядок нормализатора элемента $A^{p^{\alpha-\beta} u}$ относительно группы $\mathfrak{G}$ должен делиться на число $p^{2\alpha-\beta}$. Исключение составляет случай $p = 2$, $\beta = 1$.

Доказательство. Из равенства

$$XAX^{-1} = A^m, \quad m \equiv 1 + r \pmod{p^{\beta+1} v}$$

получаем

$$XA'X^{-1} = A'^m, \quad m \equiv 1 + kp^\beta \pmod{p^{\beta+1}},$$

где $A' = A^n$ и k есть некоторое число из ряда $1, 2, 3, \ldots, p-1$. Это показывает, что $\mathfrak{N}(A', p^\beta) \neq \mathfrak{N}(A', p^{\beta+1})$. В работе [1]) доказано, что в этом случае в последовательности

$$\mathfrak{N}(A', p^\beta), \quad \mathfrak{N}(A', p^{\beta+1}), \quad \ldots, \quad \mathfrak{N}(A', p^\alpha)$$

будет $\alpha - \beta + 1$ различных групп, если только мы не имеем случая $p = 2$, $\beta = 1$. Следовательно, индекс подгруппы $\mathfrak{N}(A', p^\alpha)$ относительно группы $\mathfrak{N}(A', p^\beta)$ будет равен $p^{\alpha-\beta}$. Группа $\mathfrak{N}(A', p^\alpha)$ есть нормализатор элемента A' относительно группы $\mathfrak{G}$. Следовательно, элемент A содержится в группе $\mathfrak{N}(A', p^\alpha)$ и порядок этой группы делится на p^α. Мы доказали, таким образом, что порядок группы $\mathfrak{N}(A', p^\beta)$ делится на число $p^{2\alpha-\beta}$. Группа $\mathfrak{N}(A', p^\beta)$ или совпадает с нормализатором элемента $A'^{p^{\alpha-\beta}}$, или является подгруппой этого нормализатора. Теорема II доказана.

Теорема III. *Пусть A есть элемент порядка h группы $\mathfrak{G}$ и пусть $\{A\}$ есть подгруппа, порожденная элементом A. Если отношение порядков нормализаторов группы $\{A\}$ и элемента A взаимно просто с $\varphi(h)$, то элемент A не может быть сопряжен со своею степенью.*

Доказательство. Предположим, что в группе $\mathfrak{G}$ элемент A сопряжен со своею степенью; пусть X есть элемент группы $\mathfrak{G}$, для которого

$$XAX^{-1} = A^m, \quad m \not\equiv 1 \pmod{h}.$$

Число m, очевидно, должно быть взаимно просто с h. Следовательно, по теореме Ферма-Эйлера

$$m^{\varphi(h)} \equiv 1 \pmod{h}.$$

Пусть

$$\varphi(h) = p_1 p_2 \cdots p_{\mu-1} p_\mu$$

есть разложение числа $\varphi(h)$ на простые множители (из которых, разумеется, не все обязательно различны). Обозначим через $\mathfrak{N}^{(z)}(A, r)$ совокупность элементов Y группы $\mathfrak{G}$, для которых

$$YAY^{-1} = A^n, \quad n^z \equiv 1 \pmod{r},$$

где r есть некоторый делитель порядка h элемента A. Совокупности такого рода обладают некоторыми свойствами, аналогичными свойствам квазинормализаторов. Так, нетрудно доказать, что всякая такая совокупность является группой (см. выше доказательство аналогичного свойства квазинормализаторов). Если s есть делитель числа r, то $\mathfrak{N}^{(z)}(A, r)$ или совпадает с $\mathfrak{N}^{(z)}(A, s)$ или является подгруппой этой группы. Если w есть делитель числа z, то $\mathfrak{N}^{(w)}(A, r)$ или совпадает с $\mathfrak{N}^{(z)}(A, r)$ или является подгруппой этой группы. Легко доказать, что в последнем случае $\mathfrak{N}^{(w)}(A, r)$ является нормальным делителем группы $\mathfrak{N}^{(z)}(A, r)$. Действи-

тельно, пусть Y_1 есть элемент группы $\mathfrak{N}^{(w)}(A, r)$ и Y_2 есть элемент группы $\mathfrak{N}^{(z)}(A, r)$. Пусть

$$Y_1 A Y_1^{-1} = A^{n_1}, \quad n_1^w \equiv 1 \pmod r;$$
$$Y_2 A Y_2^{-1} = A^{n_2}, \quad n_2^z \equiv 1 \pmod r;$$
$$Y_2^{-1} A Y_2 = A^{n_2'}, \quad n_2'^z \equiv 1 \pmod r; \quad n_2 n_2' \equiv 1 \pmod h.$$

Очевидно,

$$(Y_2^{-1} Y_1 Y_2) A (Y_2^{-1} Y_1 Y_2)^{-1} = Y_2^{-1} Y_1 Y_2 A Y_2^{-1} Y_1^{-1} Y_2 =$$
$$= Y_2^{-1} Y_1 A^{n_2} Y_1^{-1} Y_2 = Y_2^{-1} A^{n_1 n_2} Y_2 = A^{n_1 n_2 n_2'} = A^{n_1}.$$

Мы получили, что $Y_2^{-1} Y_1 Y_2$ также есть элемент группы $\mathfrak{N}^{(w)}(A, r)$, т. е. $\mathfrak{N}^{(w)}(A, r)$ является нормальным делителем группы $\mathfrak{N}^{(z)}(A, r)$.

Рассмотрим последовательность

$$\mathfrak{N}^{(\varphi(h))}(A, h), \quad \mathfrak{N}^{(p_1 p_2 \cdots p_{\mu-1})}(A, h), \quad \ldots, \quad \mathfrak{N}^{(p_1)}(A, h),$$
$$\mathfrak{N}^{(1)}(A, h) = \mathfrak{N}(A, h).$$

Элемент X содержится в группе $\mathfrak{N}^{(\varphi(h))}(A, h)$, являющейся нормализатором подгруппы $\{A\}$ относительно группы $\mathfrak{G}$, и не содержится в группе $\mathfrak{N}(A, h)$, являющейся нормализатором элемента A относительно той же группы. Следовательно, в нашей последовательности некоторые два соседних члена должны быть различными. Пусть $\mathfrak{N}^{(p_1 p_2 \cdots p_{i-1})}(A, h) \neq \mathfrak{N}^{(p_1 p_2 \cdots p_{i-1} p_i)}(A, h)$. Для упрощения записи положим $p_1 p_2 \ldots p_{i-1} = q$. Согласно вышедоказанному группа $\mathfrak{N}^{(q)}(A, h)$ является нормальным делителем группы $\mathfrak{N}^{(qp_i)}(A, h)$. Пусть $\overline{Y}$ есть некоторый элемент группы $\mathfrak{N}^{(qp_i)}(A, h)$, не входящий в группу $\mathfrak{N}^{(q)}(A, h)$. Элемент $\overline{Y}^{p_i}$, очевидно, должен содержаться в $\mathfrak{N}^{(q)}(A, h)$, так как из соотношения

$$\overline{Y} A \overline{Y}^{-1} = A^{\overline{n}}, \quad \overline{n}^{qp_i} \equiv 1 \pmod h$$

вытекает соотношение

$$\overline{Y}^{p_i} A \overline{Y}^{-p_i} = A^{n^{p_i}}, \quad (n^{p_i})^q \equiv 1 \pmod h.$$

Мы получаем, следовательно, что индекс подгруппы $\mathfrak{N}^{(q)}(A, h)$ относительно группы $\{\mathfrak{N}^{(q)}(A, h), \overline{Y}\}$ (т. е. группы, порождаемой всеми элементами группы $\mathfrak{N}^{(q)}(A, h)$ и элементом $\overline{Y}$) равен p_1. Но группа $\{\mathfrak{N}^{(q)}(A, h), \overline{Y}\}$ совпадает с группой $\mathfrak{N}^{(qp_i)}(A, h)$ или является ее подгруппой. Мы видим, следовательно, что в случае, если элемент A сопряжен со своею степенью, отношение порядков групп $\mathfrak{N}^{(\varphi(h))}(A, h)$ и $\mathfrak{N}(A, h)$ должно делиться на некоторое число, являющееся делителем числа $\varphi(h)$. Теорема III доказана.

О ХАРАКТЕРАХ МОНОМИАЛЬНЫХ ГРУПП.

В. К. Туркин (Москва).

Как известно, матрица называется мономиальной, если в ней в каждой строке и каждом столбце только один элемент отличен от нуля. При перемножении двух мономиальных матриц по обычным правилам матричного умножения снова получается мономиальная матрица, так что из мономиальных матриц можно составлять группы. Если группа мономиальных матриц является группой конечного порядка, то элементы этих матриц, отличные от нуля, являются элементами некоторой группы конечного порядка [1]).

Частным случаем групп мономиальных матриц являются группы подстановок; как известно, подстановка n символов может быть записана в виде матрицы n-й степени, у которой в каждой строке и каждом столбце один элемент равен 1, а все остальные элементы равны нулю.

Пусть $\mathfrak{G}$ есть некоторая группа конечного порядка, $\mathfrak{H}$ — подгруппа группы $\mathfrak{G}$ и $\mathfrak{K}$ — нормальный делитель группы $\mathfrak{H}$, причем дополнительная группа $\mathfrak{H}/\mathfrak{K}$ абелева ($\mathfrak{K}$ может, в частности, совпадать с $\mathfrak{H}$). С помощью $\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{K}$ можно построить представление группы $\mathfrak{G}$ в виде транзитивной группы мономиальных матриц, причем элементы этих матриц, отличные от нуля, являются элементами абелевой группы, изоморфной дополнительной группе $\mathfrak{H}/\mathfrak{K}$. О методе такого построения см. цитированную выше работу автора; мы напомним здесь только, что степень полученного таким образом представления равна индексу подгруппы $\mathfrak{H}$ относительно группы $\mathfrak{G}$. Символы, преобразуемые матрицами, мы обозначим через

$$x_1, \quad x_2, \quad \ldots, \quad x_f$$

(f есть степень матрицы).

При помощи мономиальных представлений удалось получить ряд важных теорем о конечных группах. Однако до сих пор во всех работах, посвященных мономиальным представлениям, использовались лишь определители мономиальных матриц. В настоящей работе доказываются некоторые теоремы о конечных группах путем использования характеров мономиальных матриц [2]).

Как известно, характером матрицы называется сумма диагональных элементов этой матрицы. Матрицы рассматриваемого нами мономиального представления (с коэфициентами, являющимися элементами абелевой

---

[1]) См. работу автора „Über Herstellung und Anwendungen der monomialen Darstellungen endlicher Gruppen“, Math. Ann., т. 111 (1935), стр. 743—747.

[2]) О характерах групп подстановок см. книгу A. Speiser, Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung, 2-е изд., стр. 120, Berlin 1927.

группы), соответствующие элементам, входящим в один и тот же класс сопряженных элементов, имеют равные характеры [3]). Характер какой-либо матрицы (A) мы будем, как обычно, обозначать через $\chi(A)$.

Пусть A есть элемент группы $\mathfrak{G}$ и (A) — матрица, соответствующая этому элементу в рассматриваемом нами мономиальном представлении. Если характер матрицы (A) не равен нулю, то некоторые из символов x_i при линейном преобразовании (A) должны переходить сами в себя с умножением на некоторый коэфициент, являющийся элементом абелевой группы $\overline{\mathfrak{S}}$, изоморфной дополнительной группе $\mathfrak{H}/\mathfrak{K}$. Пусть, например, при линейном преобразовании (A) символ x_1 переходит в $\overline{S}x_1$ ($\overline{S}$ — элемент группы $\overline{\mathfrak{S}}$). В силу транзитивности рассматриваемого нами мономиального представления, в группе $\mathfrak{G}$ должен найтись такой элемент B, что линейное преобразование (B) переводит x_1 в любой выбранный нами символ x_i с умножением на коэфициент, являющийся элементом группы $\overline{\mathfrak{S}}$. Пусть, например, (B) переводит x_1 в $\overline{S}'x_2$. Тогда элементу $B^{-1}AB$ соответствует, очевидно, матрица $(B^{-1})(A)(B)$, переводящая x_2 в

$$\overline{S}'^{-1}\overline{S}\,\overline{S}'x_2 = \overline{S}x_2.$$

Пусть Γ есть класс сопряженных элементов группы $\mathfrak{G}$, к которому принадлежит элемент A. Если в Γ содержится ровно k элементов

$$A,\quad A_1,\quad A_2,\ \ldots,\quad A_{k-1},$$

которым соответствуют матрицы, переводящие символ x_1 в $\overline{S}x_1$, то, на основании вышеизложенного, в Γ будет иметься k элементов

$$B^{-1}AB,\quad B^{-1}A_1B,\quad B^{-1}A_2B,\quad \ldots,\quad B^{-1}A_{k-1}B,$$

переводящих x_2 в $\overline{S}x_2$ (если все A_i различны, то и все $B^{-1}A_iB$ различны). Обозначим через (Γ) матрицу, равную сумме всех матриц, соответствующих в нашем представлении элементам группы $\mathfrak{G}$, входящим в класс Γ. На основании вышеизложенного все диагональные элементы матрицы (Γ) должны быть одинаковы. Мы получаем следующую теорему:

Теорема I. *Пусть $\mathfrak{G}$ есть группа конечного порядка и Γ — класс сопряженных элементов этой группы. Построим представление группы $\mathfrak{G}$ в виде транзитивной группы мономиальных матриц степени f с коэфициентами, являющимися элементами некоторой абелевой группы $\overline{\mathfrak{S}}$. Если (Γ) есть матрица, равная сумме матриц, соответствующих в данном мономиальном представлении элементам класса Γ, то*

$$\chi(\Gamma) = (n_1\overline{S}_1 + n_2\overline{S}_2 + \ldots + n_t\overline{S}_t)f,$$

где $\overline{S}_i$ — *элементы группы* $\overline{\mathfrak{S}}_1$, *а* n_i — *неотрицательные целые числа.*

---

[3]) См., например, книгу О. Ю. Шмидта „Абстрактная теория групп“, 2-е изд., стр. 139, ГТТИ, 1933.

Как было уже выше сказано, элементам, входящим в один и тот же класс сопряженных элементов, соответствуют матрицы с одинаковыми характерами. Следовательно, если h есть порядок класса Γ и A попрежнему — один из элементов этого класса, то

$$\chi(\Gamma) = h\chi(A),$$

т. е.

$$\frac{h\chi(A)}{f} = n_1\overline{S}_1 + n_2\overline{S}_2 + \ldots + n_t\overline{S}_t.$$

Рассмотрим случай, когда числа h и f взаимно просты. В этом случае каждое из чисел n_i должно, очевидно, делиться на h:

$$n_i = hm_i$$

(m_i — целые неотрицательные числа). Мы получаем

$$\chi(A) = (m_1\overline{S}_1 + m_2\overline{S}_2 + \ldots + m_t\overline{S}_t)f.$$

Это равенство возможно лишь в одном из следующих двух случаев:

1) $m_1 = m_2 = \ldots = m_t = 0$;

2) $m_1 = m_2 = \ldots = m_{\mu-1} = m_{\mu+1} = \ldots = m_t = 0, \quad m_\mu = 1.$

Во втором случае матрица (A) должна иметь следующий вид:

$$(A) = \begin{pmatrix} \overline{S}_\mu & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \overline{S}_\mu & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \overline{S}_\mu & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \overline{S}_\mu \end{pmatrix},$$

т. е. (A) должна быть скалярной матрицей. Но тогда (A) перестановочна со всеми матрицами нашего мономиального представления и или A есть инвариантный элемент группы $\mathfrak{G}$, или $\overline{S}_\mu = 1$. Если $A \neq 1$, то группа $\mathfrak{G}$ не может быть простой. Мы получаем следующую теорему:

Теорема II. *Пусть $\mathfrak{G}$ есть группа конечного порядка, $A \neq 1$ — элемент и $\mathfrak{H}$ — подгруппа группы $\mathfrak{G}$. Если порядок класса сопряженных элементов, в который входит A, взаимно прост с индексом подгруппы $\mathfrak{H}$, то или характер матрицы, соответствующий элементу A в мономиальном представлении, построенном с помощью подгруппы $\mathfrak{H}$, равен нулю, или группа $\mathfrak{G}$ имеет нормальный делитель, отличный от* 1.

Пусть $\mathfrak{G}$ есть группа конечного порядка, $\mathfrak{H}$ — ее подгруппа и $\mathfrak{K}$ — коммутант этой подгруппы. Пусть

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{H} + \mathfrak{H}G_2 + \mathfrak{H}G_3 + \ldots + \mathfrak{H}G_f$$

и

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{K} + \mathfrak{K}H_2 + \mathfrak{K}H_3 + \ldots + \mathfrak{K}H_t.$$

Дополнительная группа $\mathfrak{S} = \mathfrak{H}/\mathfrak{K}$, образуемая системами $S_i = \mathfrak{K}H_i$, является абелевой группой. Представление группы $\mathfrak{G}$ в виде транзитив-

ной группы мономиальных матриц с коэфициентами, являющимися элементами абелевой группы $\overline{\mathfrak{S}}$, изоморфной группе $\mathfrak{S}$, может быть построено (см. работу [1])), если положить

$$x_i = \Omega G_i,$$

где

$$\Omega = \sum_{j=1}^{t} \overline{S}_j^{-1} \mathfrak{R} \overline{S}_j$$

($\overline{S}_i$ означает элемент группы $\overline{\mathfrak{S}}$, соответствующий элементу S_i группы $\mathfrak{S}$ при изоморфизме между этими двумя группами).

При умножении (справа) на некоторый элемент группы $\mathfrak{G}$ символы x_i будут переходить сами в себя или друг в друга с умножением (слева) на коэфициент, являющийся элементом группы $\overline{\mathfrak{S}}$, так что каждому элементу группы $\mathfrak{G}$ будет соответствовать мономиальная матрица степени f. Таким образом мы получим представление группы $\mathfrak{G}$ в виде группы мономиальных матриц.

Пусть A есть некоторый элемент группы $\mathfrak{G}$ и (A) — матрица, соответствующая этому элементу. Если i-й диагональный элемент матрицы (A) отличен от нуля, то

$$\Omega G_i A = \overline{S}_\lambda \Omega G_i,$$

где $\overline{S}_\lambda$ — некоторый элемент группы $\overline{\mathfrak{S}}$. Это равенство равносильно равенству

$$G_i A = H G_i,$$

где H — некоторый элемент группы $\mathfrak{H}$, так как символ Ω переходит сам в себя (с умножением слева на некоторый элемент группы $\overline{\mathfrak{S}}$) лишь при умножении справа на элемент, содержащийся в $\mathfrak{H}$. Мы получаем, что

$$A = G_i^{-1} H G_i,$$

т. е. элемент A содержится в группе $G_i^{-1}\mathfrak{H}G_i$. Если у матрицы (A) μ диагональных элементов отличны от нуля, то элемент (A) должен содержаться в μ подгруппах из последовательности

$$\mathfrak{H}, \quad G_2^{-1}\mathfrak{H}G_2, \quad G_3^{-1}\mathfrak{H}G_3, \quad \ldots, \quad G_f^{-1}\mathfrak{H}G_f$$

(разумеется, не все из этих μ подгрупп обязательно различны).

Выше была получена формула

$$\frac{h}{f}\chi(A) = n_1\overline{S}_1 + n_2\overline{S}_2 + \ldots + n_t\overline{S}_t,$$

которую можно переписать в виде

$$\chi(A) = \frac{f}{h}(n_1\overline{S}_1 + n_2\overline{S}_2 + \ldots + n_t\overline{S}_t)$$

($n_1, n_2, \ldots, n_t$ — целые неотрицательные числа). Если элемент A содержится хотя бы в одной из подгрупп $G_i^{-1}\mathfrak{H}G_i$, то по крайней мере одно из чисел n_i отлично от нуля. Мы получаем следующую теорему:

Теорема III. *Пусть* $\mathfrak{H}$ *есть подгруппа группы* $\mathfrak{G}$ *конечного порядка и пусть*

$$\mathfrak{G}=\mathfrak{H}+\mathfrak{H}G_2+\mathfrak{H}G_3+\ldots+\mathfrak{H}G_f.$$

Пусть A *есть элемент группы* $\mathfrak{G}$, *причем порядок класса сопряженных элементов, в который входит* A, *равен* h. *Если элемент* A *содержится хотя бы в одной из подгрупп*

$$\mathfrak{H},\quad G_i^{-1}\mathfrak{H}G_i\quad (i=2,\ 3,\ \ldots,\ f),$$

то он содержится по крайней мере в $\frac{f}{h}$ *таких подгруппах.*

Теорема IV. *Пусть* $\mathfrak{H}$ *есть подгруппа порядка* m *группы* $\mathfrak{G}$ *порядка* fm *и пусть*

$$\mathfrak{G}=\mathfrak{H}+\mathfrak{H}G_2+\mathfrak{H}G_3+\ldots+\mathfrak{H}G_f.$$

Пусть A *есть элемент порядка* p^λ (p — *простое число;* f *не делится на* p) *подгруппы* $\mathfrak{H}$, *причем никакая степень* A^x ($x\neq p^\lambda$) *элемента* A *не содержится в коммутанте подгруппы* $\mathfrak{H}$. *Пусть* h *есть порядок класса сопряженных элементов группы* $\mathfrak{G}$, *в который входит* A. *Если* A *содержится менее чем в* $\frac{2f}{h}$ *членах последовательности*

$$\mathfrak{H},\quad G_2^{-1}\mathfrak{H}G_2,\quad G_3^{-1}\mathfrak{H}G_3,\quad \ldots,\quad G_f^{-1}\mathfrak{H}G_f,$$

то группа $\mathfrak{G}$ *имеет нормальный делитель.*

Доказательство. Достаточно доказать, что если мы построим представление группы $\mathfrak{G}$ в виде группы мономиальных матриц с помощью подгруппы $\mathfrak{H}$ и ее коммутанта $\mathfrak{K}$, то в этом представлении матрица (A) будет иметь определитель[4]), отличный от единицы; как известно, в этом случае группа $\mathfrak{G}$ должна иметь нормальный делитель (см. работу[1])).

Приступим к вычислению определителя матрицы (A). Пусть

$$\mathfrak{H}G_{i_1},\quad \mathfrak{H}G_{i_2},\quad \ldots,\quad \mathfrak{H}G_{i_c}$$

есть последовательность выражений $\mathfrak{H}G_i$, переходящих друг в друга циклически (с умножением слева на некоторый элемент группы $\overline{\mathfrak{S}}$) при умножении справа на A. Очевидно, $c=p^\mu$, где $\mu\leqslant\lambda$. Далее мы имеем

$$\mathfrak{H}G_{i_1}A^{p^\mu}=\overline{S}_{i_1}\mathfrak{H}G_{i_1},$$

где $\overline{S}_{i_1}$ — некоторый элемент группы $\overline{\mathfrak{S}}$. Отсюда мы получаем, что

$$G_{i_1}A^{p^\mu}=H_{i_1}G_{i_1}$$

(H_{i_1} — элемент подгруппы $\mathfrak{H}$) и

$$G_{i_1}A^{p^\mu}G_{i_1}^{-1}=H_{i_1}.$$

---

[4]) Определителем мономиальной матрицы мы называем произведение всех ее элементов, отличных от нуля.

Порядок элемента H_{i_1} равен, очевидно, порядку элемента A^{p^μ}, т. е. $p^{\lambda-\mu}$. Значит, порядок элемента $\overline{S}_{i_1}$ группы $\overline{\mathfrak{S}}$ равен p^ν, где $\nu \leqslant \lambda - \mu < \lambda$. Мы получили, таким образом, что произведение всех коэфициентов, появляющихся слева при умножении выражений ΩG_{i_α} $(\alpha = 1, 2, \ldots, c)$ справа на A, есть элемент группы $\overline{\mathfrak{S}}$ порядка, меньшего чем p^λ (поскольку это произведение равно $\overline{S}_{i_1}$). Подобное рассуждение мы можем провести для любой последовательности выражений ΩG_i, образующих цикл более чем из одного элемента. Мы получаем, таким образом, что произведение всех недиагональных отличных от нуля элементов матрицы (A) есть элемент группы $\overline{\mathfrak{S}}$ порядка, меньшего чем p^λ.

Переходим к диагональным элементам матрицы (A). Заметим, прежде всего, что число таких элементов, отличных от нуля, не делится на p. Действительно, число всех отличных от нуля элементов матрицы (A) равно f, т. е., по условиям теоремы IV, не делится на p. Число же недиагональных отличных от нуля элементов матрицы (A) должно делиться на p, так как эти элементы мы можем распределить по циклам, причем в каждом из этих циклов будет содержаться p^ω $(\omega \leqslant \lambda)$ элементов.

Итак, число диагональных элементов матрицы (A) не делится на p. Число это согласно условиям теоремы IV меньше чем $\frac{2f}{h}$. Из формулы

$$\chi(A) = \frac{f}{h}\,(n_1\overline{S}_1 + n_2\overline{S}_2 + \ldots + n_t\overline{S}_t)$$

следует, что лишь одно из чисел n_i отлично от нуля, т. е. что все диагональные отличные от нуля элементы матрицы (A) одинаковы.

Пусть

$$\Omega A = \overline{S}\Omega.$$

Элемент $\overline{S}$ группы $\overline{\mathfrak{S}}$, очевидно, должен быть порядка p^λ, так как в противном случае некоторая степень элемента A, отличная от 1, содержалась бы в $\mathfrak{N}$ вопреки условиям теоремы IV. Определитель матрицы (A), очевидно, равен $\overline{S}^v\,\overline{S}'$, где v не делится на p, а $\overline{S}'$ есть элемент группы $\overline{\mathfrak{S}}$ порядка, меньшего чем p^λ. Мы видим, что определитель матрицы (A) есть элемент порядка p^λ группы $\overline{\mathfrak{S}}$, т. е. не равен единице. Тем самым теорема IV доказана.

Нетрудно доказать, что нормальный делитель, существование которого обнаруживается теоремой IV, является характеристической подгруппой группы $\mathfrak{G}$ и что его порядок делится на f.

SUR LES ESPACES DISTANCIÉS.

Par Maurice Fréchet (Paris).

Introduction. Nous voudrions ici appeler l'attention sur quelques conséquences d'un des résultats publiés par M. Kunugui dans une note récente [1]).

M. Kunugui donne une nouvelle démonstration d'un théorème de M. Hausdorff, d'après lequel tout espace distancié (E. A., p. 61) [2]) R est isométrique d'un ensemble appartenant à un espace distancié complet (E. A., p. 74) E_R. M. Kunugui nous a fait en outre observer que son résultat est plus précis que celui de M. Hausdorff, en ce sens qu'on peut même supposer que E_R est un espace vectoriel (E. A., p. 141) distancié complet.

La méthode de démonstration de M. Kunugui consiste en une heureuse modification de la méthode que nous avions employée [3]) pour établir que tout espace distancié *séparable* (E. A., p. 190) est isométrique d'un ensemble de l'espace D_ω (dont la définition sera rappelée plus loin). Cette méthode conduit à quelques conséquences que nous voudrions signaler.

Le point important est qu'à une isométrie près l'espace E_R de M. Kunugui ne dépend que du nombre cardinal (ou puissance) de R, comme nous allons le voir plus loin.

Définition des espaces D_p. Soit p un nombre cardinal (fini ou transfini) donné. Faisons lui correspondre, d'une manière déterminée, quoique arbitraire, un ensemble P, dont la puissance est égale à p. On va maintenant faire correspondre à p un espace D_p de la façon suivante.

Chaque élément X de D_p est une fonction numérique *bornée* (réelle, par exemple) $x(\xi)$ de l'élément ξ variable sur P. Deux éléments X, Y définis par $x(\xi)$, $y(\xi)$ sont identiques ou distincts, suivant que $x(\xi) - y(\xi)$ est, ou non, partout nul sur P. On représente par $X + Y$, l'élément défini par $x(\xi) + y(\xi)$, et par aX, où a est un nombre (réel), l'élément défini par $ax(\xi)$. On appelle norme de X, la borne supérieure $\|X\|$ de $|x(\xi)|$, quand ξ varie sur P. La distance (X, Y) de X et de Y sera la norme de $X - Y$.

On vérifie maintenant sans difficulté que D_p est un espace vectoriel distancié (E. A., p. 140). Cet espace est même „tendu“ (E. A., p. 142).

---

[1]) K. Kunugui, Applications des espaces à une infinité de dimensions à la théorie des ensembles, Proc. Imper. Academy Tokyo, t. XI (1935), No 9, pp. 351—353.

[2]) Nous renverrons pour quelques définitions, au moyen de la désignation E. A., à notre ouvrage „Les espaces abstraits...“, Paris, Gauthier-Villars, 1928.

[3]) Les ensembles abstraits et le Calcul Fonctionnel, Rend. Circ. Mat. Palermo, t. XXX (1910), p. 12.

Il est complet (E. A., p. 74) et même, ce qui est plus précis, la définition de la distance donnée ci-dessus vérifie le critère (généralisé) de convergence de Cauchy.

Propriétés des espaces D_p. I. Substituons à P un ensemble Q ayant le même nombre cardinal p; on obtiendra à la place de D_p un espace Δ_p. Il est clair que D_p et Δ_p, qui en général sont distincts, seront vectoriellement isométriques, c'est-a-dire qu'il existe entre les points de D_p et Δ_p une correspondance ponctuelle biunivoque qui n'altère aucune des opérations: d'addition de deux vecteurs, de multiplication d'un vecteur par une constante, et même de distance de deux points.

II. Si $\tilde{\omega}$ est un nombre cardinal supérieur à p, D_p est *vectoriellement applicable* sur un ensemble appartenant à $D_{\tilde{\omega}}$. En effet, soit II l'ensemble de puissance $\tilde{\omega}$ qu'on fait correspondre à $\tilde{\omega}$ pour définir $D_{\tilde{\omega}}$. Il y a un sous-ensemble Q de II, qui est de puissance p, et peut servir à définir un espace Δ_p vectoriellement applicable sur D_p. Or, considérons l'ensemble S des fonctions $z(\eta)$ définies et bornées sur II et qui sont nulles en dehors de Q, c'est-à-dire sur II $-$ Q. Il est facile de voir que S est un sous-ensemble de $D_{\tilde{\omega}}$, qui est vectoriellement applicable sur Δ_p. Par suite, D_p est vectoriellement applicable sur un sous-ensemble S de $D_{\tilde{\omega}}$.

III. Ainsi: *à la suite ordonnée des nombres cardinaux finis et transfinis, p, correspond une suite, bien déterminée et ordonnée dans le même sens, d'espaces D_p, qui sont, chacun, vectoriels, distanciés, complets et tendus et tels que chacun d'eux, D_p, soit vectoriellement isométrique de chacun de ceux, $D_{\tilde{\omega}}$, qui le suivent* (c'est-à-dire tels que $\tilde{\omega} > p$).

Observons que, si $\mathfrak{c}$ est la puissance du continu, la puissance de l'ensemble des points de D_p sera $\mathfrak{c}^p$. De sorte que les puissances des espaces D_p ne décroissent pas, quand p croît.

Quand p est la puissance $\aleph_0$ d'un ensemble dénombrable, on peut prendre pour P la suite des entiers; alors l'espace $D_{\aleph_0}$ n'est autre que celui que nous avons étudié il y a longtemps (E. A., p. 97) sous le nom d'espace D_ω. (Comme ω a la puissance $\aleph_0$, il n'y a pas un gros inconvénient à continuer à employer ce symbole D_ω.)

Quand p a la puissance $\mathfrak{c}$ du continu, $D_\mathfrak{c}$ n'est autre que l'espace des fonctions bornées, en y définissant la convergence au moyen de la convergence uniforme.

Raisonnement de M. Kunugui. Soit R un espace distancié, il a une certaine puissance p. En substituant R à P dans la construction de D_p, on obtient un certain espace E_R vectoriellement isométrique de D_p. M. Kunugui montre que R est isométrique d'un sous-ensemble H de E_R. (Il en résultera que R est isométrique d'un sous-ensemble de D_p.) A cet effet, utilisant l'artifice employé dans notre mémoire cité en note [2]), il considère sur R un point arbitraire mais fixe α et un point variable a, et il fait correspondre à a le point X_a de E_R défini par la fonction

$$x_a(\xi) = (a, \xi) - (a, \alpha).$$

Comme dans notre mémoire, on vérifie aisément que la distance (X_a, X_b) est égale à (a, b), c'est-à-dire que R est applicable sur un sous-ensemble H de E_R. Le résultat de M. Kunugui peut maintenant s'exprimer ainsi:

Tout espace distancié R est isométrique d'un sous-ensemble d'un ensemble vectoriel distancié complet et tendu D_p.

Compléments. On peut ajouter: D_p est celui qui porte pour indice p la puissance p de R, parmi les espaces d'une suite transfinie D_1, D_2, ... d'espaces formés a priori *independamment de R.*

On peut même dire:

Tous les espaces distanciés de puissances $\leqslant p$ sont isométriques de sous-ensembles d'un même espace vectoriel distancié complet et tendu D_p.

Remarques. I. Il serait intéressant de chercher si l'on peut préciser ce résultat. En effet, on a $c^p > p$, de sorte que l'espace D_p, dans lequel sont „isométriquement plongés" les espaces distanciés de puissance $\leqslant p$, est de puissance $> p$. Il serait utile de déterminer s'il existe un espace „universel" parmi les espaces distanciés de puissances $\leqslant p$, c'est-à-dire si, *parmi eux*, il en existe un, F_p, tel que tout espace distancié de puissance $\leqslant p$ soit isométrique d'un sous-ensemble de F_p.

II. Après rédaction de ce mémoire j'ai eu connaissance, dans la liste des Abstracts publiés par le Bull. Amer. Math. Soc. 1935, d'une note de quelques lignes où M. Vickery considère aussi des espaces analogues aux D_p.

О ПРОДОЛЖАЕМЫХ ПОЛИНОМАХ I. ОБЩАЯ ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМЫ [1].

Н. Г. Чеботарев (Казань).

В последние годы возник новый тип проблем теории функций, так называемые *проблемы коэфициентов*. Обозначая при помощи X какое-нибудь внутреннее свойство аналитической функции, определяемой степенным рядом

$$f(z)=a_0+a_1z+a_2z^2+\dots, \tag{1}$$

мы можем формулировать проблему коэфициентов как задачу характеризации свойства X при помощи неравенств между коэфициентами a_i. Перечислим несколько важнейших из решенных проблем коэфициентов:

1) Проблема Каратеодори относительно функций, вещественная часть которых остается неотрицательной внутри единичного круга $|z|\leqslant 1$. Для этого необходимо и достаточно соблюдение следующих неравенств:

$$a_0+\bar{a}_0\geqslant 0,\quad \begin{vmatrix} a_0+\bar{a}_0 & a_1 \\ \bar{a}_1 & a_0+\bar{a}_0 \end{vmatrix}\geqslant 0,$$

$$\begin{vmatrix} a_0+\bar{a}_0 & a_1 & a_2 \\ \bar{a}_1 & a_0+\bar{a}_0 & a_1 \\ \bar{a}_2 & \bar{a}_1 & a_0+\bar{a}_0 \end{vmatrix}\geqslant 0,\quad \dots$$

2) Проблема И. Шура относительно функций, ограниченных внутри единичного круга $|z|\leqslant 1$, для которых, например, имеет место неравенство

$$|F(z)|\leqslant 1.$$

Можно свести эту проблему к проблеме Каратеодори, полагая

$$F(z)=e^{-f(z)}.$$

И. Шур решает эту проблему, налагая на функции бесконечной последовательности

$$f_{i+1}(z)=\frac{f_i(z)-a_0^{(i)}}{z\left(1-\overline{a_0^{(i)}}\,f_i(z)\right)}=a_0^{(i+1)}+a_1^{(i+1)}z+\dots$$

$$(i=0,\ 1,\ 2,\dots;\quad f_0(z)=f(z))$$

---

[1] N. Tschebotaröw, Über F-Polynome I, Изв. Каз. ф.-м. о. (3), т. 8 (1936—37), стр. 109—123.

Условие

$$|a_0^{(i)}| \leqslant 1.$$

(Если при этом для какого-нибудь i имеет место $|a_0^{(i)}| = 1$, то должно также иметь место

$$a_\nu^{(i)} = 0 \quad (\nu = 1, 2, 3, \ldots).)$$

3) Проблема *звездообразных функций*, т. е. функций, у которых аргумент $f(z)$ есть монотонная внутри $|z| \leqslant 1$ функция аргумента z. Это условие может быть аналитически представлено следующим образом:

$$\Re \frac{zf(z)}{f'(z)} \leqslant 0,$$

что сводит эту проблему к проблеме Каратеодори.

4) Проблема выпуклых функций, т. е. функций, отображающих окружности $|z| = \rho < 1$ в выпуклые кривые. Это условие может быть аналитически представлено следующим образом:

$$\Re \frac{zf''(z) + f'(z)}{f'(z)} \geqslant 0,$$

что сводит и эту проблему к проблеме Каратеодори.

5) Проблема функций, не принимающих внутри единичного круга $|z| \leqslant 1$ значений 0 и 1. Эта проблема может быть сведена к проблеме Каратеодори при помощи модулярных функций.

Все упомянутые проблемы имеют решения, формально однотипные по следующему принципу. Решение каждой из этих проблем дается неравенствами, каждое из которых содержит лишь конечное число коэфициентов a_i: первое неравенство содержит только a_0, второе — только a_0, a_1, третье — только a_0, a_1, a_2 и т. д. Кроме того, коэфициент с наибольшим номером входит в каждое из этих неравенств линейно. Поэтому если мы закрепим значения n первых коэфициентов a_0, $a_1, \ldots,$ a_{n-1}, которые бы удовлетворяли неравенствам, связывающим эти коэфициенты, то можно выбрать все остальные коэфициенты a_n, $a_{n+1}, \ldots$ так, чтобы получающаяся при этом функция

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots$$

служила решением нашей проблемы.

Это позволяет формулировать такого рода проблемы, как *проблемы продолжения:*

Задан полином

$$f(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n;$$

узнать, можно ли его так *продолжить*, т. е. отыскать функцию типа

$$F(z) = f(z) + z^{n+1}\varphi(z),$$

чтобы эта функция обладала свойством X.

Существуют, однако, проблемы другого типа, решения которых не даны в форме решения проблем продолжения, но тем не менее только тогда могут считаться удовлетворительными и практически удобными,

если будут также решены, как побочные, соответствующие им проблемы продолжения. К такого рода проблемам принадлежит проблема коэфициентов однолистных функций:

Узнать, является ли аналитическая функция

$$f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \ldots,$$

регулярная внутри $|z| < 1$, однолистной в $|z| < 1$, т. е. не допускающей различных значений z_1, z_2, для которых бы имело место равенство

$$f(z_1) = f(z_2).$$

В этой первоначальной своей формулировке проблема уже решена и притом различными способами [2]). Эти решения позволяют решать проблему для многих элементарных конкретно заданных функций. Однако они не дают общего понятия о характере функций, однолистных внутри $|z| < 1$. В частности, они ничего не говорят о коэфициентах разложений этих функций в степенные ряды. При помощи этих методов нельзя, например, указать границ для этих коэфициентов, в то время как другие методы дают для них довольно точные границы:

$$|a_n| \leqslant n\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < ne.$$

Причина этого лежит в форме этих решений, которые даются в виде неравенств между бесконечным числом коэфициентов. Решение было бы удовлетворительным, если бы оно давало неравенство для первого коэфициента, для первых двух, для первых трех и т. д. Но такие неравенства получались бы, если бы мы умели решать следующую проблему продолжения для однолистных функций:

Задан полином

$$f_n(z) = z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n;$$

узнать, возможно ли найти такую однолистную внутри $|z| < 1$ функцию $f(z)$, у которой первые $n+1$ коэфициентов разложения в степенной ряд совпадали бы с соответствующими коэфициентами полинома $f_n(z)$.

Эту задачу нам будет необходимо последовательно решить для $n = 1, 2, 3, \ldots$

Таким образом проблема продолжения приобретает решающую роль при решении более трудных проблем коэфициентов. Это обстоятельство дало мне повод предпринять систематическое изучение проблем продолжения для различных X-свойств.

Будем различать два типа проблем продолжения, которые мы назовем соответственно первой и второй проблемами продолжения. В первой проблеме ищутся *аналитические функции* $\varphi(z)$ такого рода, чтобы функция $f(z) + z^{n+1}\varphi(z)$ обладала X-свойством. Мы скоро будем видеть, что характер решения такой проблемы зависит часто от аналитического характера, который мы заранее предписываем функции $\varphi(z)$.

Вторая проблема продолжения имеет чисто алгебраический характер. В ней ищут $\varphi(z)$ в форме *полинома, степень которого заранее не*

---

[2]) N. Tschebotarëw, Bemerkung zur Theorie der schlichten Funktionen, Jber. D. M.-V., т. 38 (1929), стр. 244—247.

указывается и, следовательно, может быть сколь угодно высокой. Конечно, можно ожидать, что системы коэфициентов полиномов $f(z)$ (которые можно представить в виде точек n-мерного пространства), обладающих X-продолжаемостью, образуют незамкнутое множество, точки сгущения которого дают системы коэфициентов, соответствующие некоторым решениям первой проблемы продолжения. Отсюда автоматически вытекает аналитический характер получаемых таким образом решений, который отнюдь не тривиален. Примером может служить проблема R-продолжаемых полиномов (под R-полиномами мы разумеем полиномы, все корни которых вещественны). Замыканием множества всех R-полиномов служит совокупность полиномов и целых функций порядка 1*, т. е. функций типа

$$e^{\alpha+\beta z+\gamma z^2}z^{\mu}\prod_{\nu=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{a_\nu}\right)e^{\alpha_\nu+\beta_\nu z},$$

где a_ν вещественны и $\gamma \geqslant 0$. Это вытекает из следующей теоремы Лагерра:

Чтобы целая функция была пределом последовательности R-полиномов, необходимо и достаточно, чтобы она была порядка 1*.

В ближайших статьях намеченной серии мы будем понимать под X-свойством полиномов то или иное ограничение в распределении их корней. Для краткости введем следующие новые обозначения:

R-полиномы — полиномы с вещественными корнями.

K-полиномы — полиномы, корни которых лежат на единичной окружности.

H-полиномы (полиномы Гурвица) — полиномы, корни которых имеют неотрицательные вещественные части.

Если вообще на комплексной числовой плоскости задано множество $\mathfrak{M}$, то мы будем разуметь под $\mathfrak{M}$-полиномом полином, все корни которого принадлежат множеству $\mathfrak{M}$.

Первоначально мы будем заниматься исключительно второй проблемой продолжения. Под $\mathfrak{M}F$-полиномом мы будем разуметь полином, который можно продолжить так, чтобы продолженный полином (на степень которого мы не накладываем никакого ограничения) имел все корни на множестве $\mathfrak{M}$. В частности, таким путем будут введены обозначения: RF-полиномы, KF-полиномы, HF-полиномы и т. д.

Если множество $\mathfrak{M}$ выпукло, в силу чего производная от $\mathfrak{M}$-полинома есть также $\mathfrak{M}$-полином, то можно ввести понятие $\mathfrak{M}$-интегрируемого полинома (или кратко: $\mathfrak{M}I$-полинома). Под $\mathfrak{M}I$-полиномом мы будем разуметь полином, который можно рассматривать как q-ю производную (при сколь угодно большом q) от $\mathfrak{M}$-полинома.

Перейдем к беглому обзору полученных до сих пор результатов относительно F-полиномов, которые были главным образом получены моими сотрудниками Н. Н. Мейманом (RF-полиномы) и Л. И. Гавриловым (KF-полиномы).

§ 1. *RF*-полиномы. Задан полином

$$f(x)=1+a_1x+\ldots+a_nx^n. \tag{1}$$

Каким условиям должны удовлетворять его коэфициенты

$$a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_n$$

для того, чтобы существовал полином

$$F(x) = f(x) + x^{n+1}\varphi(x) =$$

$$= 1 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + b_{n+1}x^{n+1} + \ldots + b_m x^m, \tag{2}$$

все корни которого были бы вещественны? При этом мы не накладываем никаких ограничений на степень m полинома $F(x)$.

Обозначая через $x_1, x_2, \ldots, x_m$ величины, обратные корням полинома $F(x)$, мы выразим коэфициенты $s_1, s_2, s_3, \ldots$ логарифмической производной от $F(x)$:

$$-\frac{F'(x)}{F(x)} = s_1 + s_2 x + \ldots + s_{n+1}x^n + \ldots, \tag{3}$$

связанные с a_i известными формулами Ньютона

$$\begin{cases} s_1 + a_1 = 0, \\ s_2 + a_1 s_1 + 2a_2 = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ s_n + a_1 s_{n-1} + \ldots + a_{n-1}s_1 + na_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases} \tag{4}$$

при помощи следующих формул:

$$s_k = x_1^k + x_2^k + \ldots + x_m^k \quad (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{5}$$

С другой стороны, величины $s_1, s_2, \ldots, s_n$ в силу (4) зависят от коэфициентов $a_1, a_2, \ldots, a_n$ полинома $f(x)$, но не от b_i. Это позволяет формулировать поставленную проблему следующим образом:

Заданы n вещественных чисел

$$s_1, \quad s_2, \quad \ldots, \quad s_n. \tag{6}$$

Каким условиям они должны быть подчинены для того, чтобы они допускали представление (5) через вещественные параметры $x_1, x_2, \ldots, x_m$? При этом число m не предполагается заданным.

Эта задача родственна так называемой *проблеме моментов*, состоящей, как известно, в нахождении условий представимости величин s_k в форме

$$s_k = t_1 x_1^k + t_2 x_2^k + \ldots + t_m x_m^k \quad (k = 1, 2, \ldots, n), \tag{7}$$

где как x_i, так и t_i могут пробегать всевозможные вещественные значения. Величины t_i обычно подчиняют дополнительному условию

$$t_1 + t_2 + \ldots + t_m = 1. \tag{8}$$

Часто в выражениях (7), (8) вместо конечных сумм ставят интегралы Стильтьеса:

$$s_k = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k d\psi(x) \quad (k = 1, 2, \ldots, n), \tag{7'}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\psi(x) = 1. \tag{8'}$$

Это, однако, не приводит ни к каким изменениям в характере условий решаемости проблемы.

Разница между обеими проблемами состоит в том, что *RF*-проблема требует, чтобы величины t_i были равны единице или, точнее, целым положительным числам, так как мы не исключаем случая кратных корней.

Необходимое и достаточное условие для решаемости проблемы моментов состоит, как известно, в том, чтобы квадратичная форма

$$(9)\qquad \sum_{\mu,\,\nu=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]-1} s_{\mu+\nu}u_\mu u_\nu = \sum_{i=1}^{m} t_i\left(u_0 + x_i u_1 + \ldots + x_i^{\left[\frac{n}{2}\right]-1} u_{\left[\frac{n}{2}\right]-1}\right)^2$$

была положительно определенной, т. е. чтобы имели место соотношения

$$(10)\qquad s_0 = 1,\quad \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \ldots & s_k \\ s_1 & s_2 & \ldots & s_{k+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ s_k & s_{k+1} & \ldots & s_{2k} \end{vmatrix} \geqslant 0 \quad \left(k = 1, 2, \ldots, \left[\frac{n}{2}\right]-1\right).$$

Отсюда вытекают некоторые *необходимые* условия для *RF*-проблемы, которые мы получим, если напишем все вытекающие из (10) неравенства, которые не содержат s_0. Это суть

$$(11)\qquad \begin{vmatrix} s_2 & s_3 & \ldots & s_k \\ s_3 & s_4 & \ldots & s_{k+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ s_k & s_{k+1} & \ldots & s_{2k-2} \end{vmatrix} \geqslant 0 \quad \left(k = 2, 3, \ldots, \left[\frac{n}{2}\right]\right).$$

Неиспользованное до сих пор требование целочисленности величин t_i приводит нас к принципиально новым и гораздо более сложным необходимым и достаточным условиям. Н. Н. Мейману принадлежит большая заслуга в том, что он впервые отказался от попыток найти для *RF*-проблемы конечное число необходимых и достаточных условий: это невозможно.

Чтобы получить наглядное геометрическое представление, будем считать $s_1, s_2, \ldots, s_n$ декартовыми координатами n-мерного пространства. Назовем *RF*-областью совокупность тех систем значений переменных s_i (*точек* нашего пространства), которые допускают представление (5). Из формы равенств (5) следует, что *RF*-область может быть образована путем неограниченного параллельного переноса кривой

$$(12)\qquad s_1 = x,\quad s_2 = x^2,\quad \ldots,\quad s_n = x^n$$

вдоль самой себя. Из исследований Н. Н. Меймана вытекает:

RF-область при $n \geqslant 4$ ограничена бесчисленным множеством кусков различных аналитических поверхностей.

Чтобы получить аналитическое выражение для этих кусков гиперповерхностей, воспользуемся нижеследующими леммами, которые были доказаны независимо Н. Н. Мейманом и мною:

Лемма 1. *Уравнения границы RF-области не зависят от координаты* s_1.

Другими словами, *RF*-область имеет форму цилиндра с образующими, параллельными оси s_1.

Доказательство. Первоначально мы будем представлять себе *RF*-область замкнутой, присоединяя к ней ее предельные точки. Пусть точка $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ лежит в *RF*-области, т. е. пусть

$$s_k = \sum_{i=1}^{m} x_i^k \quad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Тогда это же имеет место для точки

$$s'_k = \sum_{i=1}^{m} x_i^k + t\xi^k \quad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

где t — целое положительное, а ξ — любое вещественное число. Заставим теперь t неограниченно расти и свяжем ξ с t равенством

$$t\xi = \alpha,$$

где α — произвольно заданная постоянная величина. В силу этого величины

$$t\xi^2, \quad t\xi^3, \quad \ldots, \quad t\xi^n$$

будут стремиться к нулю. Таким образом точка

$$s'_1 = s_1 + \alpha, \quad s'_2 = s_2, \quad \ldots, \quad s'_n = s_n$$

является точкой сгущения последовательности точек *RF*-области и в силу ее замкнутости тоже принадлежит *RF*-области, ч. и тр. д.

Лемма 2. *Если точка* $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ *лежит в RF-области, то это имеет место также для точки* $(s_1, s_2 + \alpha, \ldots, s_n)$, *где* α — *произвольная положительная величина.*

Доказательство. В силу леммы 1 мы можем не обращать внимания на координату s_1. Вместе с точкой $(s_2, s_3, \ldots, s_n)$ точка

$$s'_k = s_k + t\xi^k \quad (k = 2, 3, \ldots, n),$$

где t — целое положительное, а ξ — любое вещественное число, также лежит в *RF*-области. Неограниченно увеличивая t и связав ξ с t соотношением

$$t\xi^2 = \alpha,$$

что в силу $\alpha > 0$ всегда возможно, мы увидим, что величины

$$t\xi^3, \quad t\xi^4, \ldots, \quad t\xi^n$$

будут стремиться к нулю. Отсюда, рассуждая как при доказательстве леммы 1, мы докажем, что вместе с точкой $(s_2, s_3, \ldots, s_n)$ и точка $(s_2 + \alpha, s_3, \ldots, s_n)$, где $\alpha > 0$, лежит в *RF*-области, ч. и тр. д.

Употребленный здесь прием позволяет нам решить следующую задачу:

Задано n вещественных величин $s_1, s_3, \ldots, s_{2n-1}$. Удовлетворить уравнениям

$$(13) \qquad s_{2k-1} = x_1^{2k-1} + x_2^{2k-1} + \ldots + x_m^{2k-1} \quad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

вещественными значениями $x_1, x_2, \ldots, x_m$ (число m не задано).

Эта задача всегда имеет решение. В самом деле, если решение существует для некоторой точки $(s_1, s_3, \ldots, s_{2n-1})$, то при помощи описанного приема мы убедимся, что это имеет также место для точки $(s_1 + \alpha, s_3, \ldots, s_{2n-1})$, где α — совершенно произвольная вещественная величина. Поэтому на координату s_1 можно не обращать внимания. Далее, если существует решение для точки $(s_3, s_5, \ldots, s_{2n-1})$, то оно существует и для точки

$$(s_3 + t\xi^3, \quad s_5 + t\xi^5, \quad \ldots, \quad s_{2n-1} + t\xi^{2n-1}).$$

Полагая

$$t\xi^3 = \alpha,$$

где α — произвольно заданная вещественная величина, и заставляя t неограниченно расти, мы в силу нечетности числа 3 всегда можем подыскать соответствующее значение для ξ. Но так как при этом процессе величины

$$t\xi^5, \quad \ldots, \quad t\xi^{2n-1}$$

стремятся к нулю, то и точка $(s_3 + \alpha, s_5, \ldots, s_{2n-1})$ имеет решение, так что и на координату s_3 можно не обращать внимания. Таким путем мы постепенно докажем, что все координаты s_{2k-1} могут принимать произвольные вещественные значения, ч. и тр. д.

Теперь перейдем к описанию приема Мейман для нахождения границ RF-области. Допустим, что координаты $s_3, s_4, \ldots, s_n$ уже подобраны так, что при достаточно большом s_2 точка $(s_2, s_3, \ldots, s_n)$ лежит в RF-области. Тогда для нашей цели достаточно найти при закрепленных значениях $s_3, s_4, \ldots, s_n$ наименьшее значение s_2 такого рода, чтобы точка $(s_2, s_3, \ldots, s_n)$ лежала в RF-области. Согласно методу Лагранжа мы должны приравнять нулю все частные производные линейного аггрегата

$$s_2 + \lambda_3 s_3 + \lambda_4 s_4 + \ldots + \lambda_n s_n$$

по переменным $x_1, x_2, \ldots, x_m$:

$$2x_i + 3\lambda_3 x_i^2 + 4\lambda_4 x_i^3 + \ldots + n\lambda_n x_i^{n-1} = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

Это показывает, что все искомые значения x_i, за исключением тривиального значения $x_i = 0$, являются корнями уравнения

$$2 + 3\lambda_3 z + 4\lambda_4 z^2 + \ldots + n\lambda_n z^{n-2} = 0,$$

т. е. что среди значений x_i существует только $n-2$ различных. В силу этого мы можем представить уравнения пограничной гиперповерхности RF-области параметрически в следующем виде:

$$(14) \qquad s_k = p_1 x_1^k + p_2 x_2^k + \ldots + p_{n-2} x_{n-2}^k \quad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

где $p_1, p_2, \ldots, p_{n-2}$ — целые неотрицательные числа. Каждой системе значений $p_1, p_2, \ldots, p_{n-2}$ соответствует одна аналитическая гиперповерхность. Н. Н. Мейман назвал эти гиперповерхности *квазидискриминантными поверхностями*. Главная трудность проблемы состоит в исследовании, какие из квазидискриминантных поверхностей действительно ограничивают RF-область и какая квазидискриминантная поверхность пересекает заданную прямую

$$s_3 = \text{const}, \quad s_4 = \text{const}, \quad \ldots, \quad s_n = \text{const}$$

в пограничной точке RF-области. Для знакомства с решением этих вопросов отошлем читателя к работе самого Н. Н. Меймана. Здесь же мы ограничимся решением проблемы для простейших случаев $n=2$ и $n=3$.

Случай $n=2$. В силу леммы 1 нам достаточно удовлетворить уравнению

$$s_2 = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_m^2.$$

Чтобы это было возможно, необходимо и достаточно, чтобы имело место неравенство

(15) $$s_2 > 0.$$

Это и есть необходимое и достаточное условие для решаемости RF-проблемы. В предельном случае

$$s_2 = 0$$

должно также иметь место

$$s_1 = 0.$$

В этом случае нетрудно также найти возможно меньшее значение для m. Для этого обратим внимание на то, что область точек, соответствующих степени $m=2$, имеет в качестве границы огибающую семейства

(16) $$s_1 = x_1 + x_2, \quad s_2 = x_1^2 + x_2^2,$$

где следует считать, например, x_1 параметром кривой и x_2 — параметром семейства. Уравнения этой огибающей суть

(17) $$s_1 = 2x_2, \quad s_2 = 2x_2^2.$$

Таким образом точки, лежащие внутри кривой (17), соответствуют степени $m=2$.

Чтобы получить точки, соответствующие степени $m=3$, будем переносить кривую (16) вдоль кривой (17). Получаемое таким образом семейство

(18) $$s_1 = x_1 + 2x_2, \quad s_2 = x_1^2 + 2x_2^2$$

имеет огибающую кривую

(19) $$s_1 = 3x_2, \quad s_2 = 3x_2^2,$$

которая, следовательно, ограничивает точки, соответствующие степени $m=3$.

Продолжая этот процесс, мы получим дискретное семейство

(20) $$s_1 = mx_2, \quad s_2 = mx_2^2 \quad (m = 1, 2, 3, \ldots)$$

парабол такого рода, что между $(m-1)$-й и m-й параболами лежат точки, соответствующие наименьшей степени m. С другой стороны, для каждой точки верхней полуплоскости $(s_2 > 0)$ можно всегда найти две параболы (20), между которыми лежит эта точка. Именно,

(21) $$m = \left[\frac{s_1^2}{s_2}\right] + \varepsilon,$$

где $\varepsilon = 0$ для целых $\frac{s_1^2}{s_2}$ и $\varepsilon = 1$ для дробных $\frac{s_1^2}{s_2}$.

Случай $n=3$. Найдем при закрепленном значении s_3 наименьшее значение s_2, для которого

$$s_2=x_1^2+x_2^2+\ldots+x_m^2,\quad s_3=x_1^3+x_2^3+\ldots+x_m^3.$$

Условие экстремума для функции

$$s_2+\lambda_3 s_3$$

дает

$$2x_i+3\lambda x_i^2=0\quad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ m).$$

Отсюда следует

$$x_i=-\frac{2}{3\lambda}\quad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ m),$$

$$s_2=\frac{4m}{9\lambda^2},\quad s_3=-\frac{8m}{27\lambda^3}.$$

Исключая λ, получим

$$s_2=m^{1/3}s_3^{2/3}.$$

Наименьшее значение для s_2 получится, если положить $m=1$. Тогда будем иметь

$$s_2^3=s_3^2.$$

Отсюда в силу леммы 2 следует, что RF-проблема имеет решение тогда и только тогда, если

(22) $$s_2^3-s_3^2\geqslant 0.$$

Для случаев $n\geqslant 4$ получается бесчисленное множество неравенств такого типа.

§ 2. *KF*-полиномы. Задан полином

$$f(z)=1+a_1z+\ldots+a_nz^n$$

n-й степени с комплексными коэфициентами a_i. Спрашивается, возможно ли так продолжить $f(z)$:

$$F(z)=f(z)+z^{n+1}\varphi(z),$$

где $\varphi(z)$ — новый полином, степень которого не задана, чтобы все корни полинома $F(z)$ лежали на единичной окружности $|z|=1$.

Обозначим, как и прежде, через s_1, s_2, s_3, ... коэфициенты логарифмической производной от $F(z)$, связанные с коэфициентами a_i формулами Ньютона, и через $e^{i\varphi_\nu}$ — величины, обратные корням полинома $F(z)$. Тогда можно привести KF-проблему к вопросу о разрешимости системы уравнений

(23) $$s_k=\sum_{\nu=1}^{m}e^{i\varphi_\nu}\quad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$

где число m не задано и поэтому может принимать сколь угодно большие значения.

Л. И. Гаврилов показал, что эта проблема всегда имеет решение. Отсылая за подробностями к статье Л. И. Гаврилова, мы наметим здесь лишь основную идею решения.

Сначала Л. И. Гаврилов полагает все $s_k = 0$. В этом случае можно удовлетворить уравнениям (21), полагая

$$e^{i\varphi_\nu} = e^{\frac{2\pi i\nu}{n+1}} \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n+1). \tag{24}$$

После этого он доказывает, что уравнения (23) имеют решения также в том случае, если s_k достаточно малы, в то время как их отношения могут быть произвольно заданы. Для этого достаточно показать, что якобиан системы функций $s_1, s_2, \ldots, s_n$ по переменным $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ не обращается в нуль в точке (24). Тогда из теоремы Юнга следует, что уравнения (23) имеют решения, поскольку величины s_k по абсолютному значению не превосходят некоторой границы ρ:

$$|s_k| < \rho \quad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Теперь зададим величины $s_1, s_2, \ldots, s_n$ совершенно произвольно. Возьмем столь большое целое число M, чтобы выполнялись неравенства

$$\left|\frac{s_k}{M}\right| < \rho \quad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Тогда, беря в левых частях уравнений (23) в роли s_k величины $\frac{s_k}{M}$, мы получим для них решение

$$\frac{s_k}{M} = \sum_{\nu=1}^{m} e^{ik\varphi_\nu} \quad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Отсюда следует

$$s_k = M \sum_{\nu=1}^{m} e^{ik\varphi_\nu} \quad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Эти равенства дают искомое решение для системы уравнений (23) при произвольных значениях $s_1, s_2, \ldots, s_n$, ч. и тр. д. Одновременно мы видим, что здесь в роли степени m можно взять число $M(n+1)$.

§ 3. *HF*-полиномы. *HF*-проблема еще не решена. Можно ожидать, что ее решение будет примерно той же трудности, что и для *RF*-проблемы. Здесь мы ограничимся изложением решения *HF*-проблемы для случая $n = 2$. Проблема допускает постановку для комплексных коэфициентов; однако для простоты мы решим ее для вещественных коэфициентов.

Приведенные в § 2 соображения позволяют свести *HF*-проблему к решению системы

$$s_1 = 2 \sum_{\nu=1}^{m} \rho_\nu \cos\theta_\nu, \tag{25}$$

$$s_2 = 2 \sum_{\nu=1}^{m} \rho_\nu^2 \cos 2\theta_\nu, \tag{26}$$

где

$$\rho_\nu > 0, \quad \cos\theta_\nu \geqslant 0 \quad (\nu = 1, 2, \ldots, m). \tag{27}$$

Из уравнения (25) непосредственно вытекает первое необходимое условие:

(28) $$s_1 \geqslant 0.$$

Далее, уравнение (26) может быть представлено в следующем виде:

$$s_2 = 4\sum_{\nu=1}^{m}\rho_\nu^2\cos^2\theta_\nu - 2\sum_{\nu=1}^{m}\rho_\nu^2 < 4\sum_{\nu=1}^{m}\rho_\nu^2\cos^2\theta_\nu,$$

в то время как из (25) непосредственно следует, что

$$s_1^2 = 4\sum_{\nu=1}^{m}\rho_\nu^2\cos^2\theta_\nu + 8\sum_{\mu\neq\nu}\rho_\mu\rho_\nu\cos\theta_\mu\cos\theta_\nu \geqslant 4\sum_{\nu=1}^{m}\rho_\nu^2\cos^2\theta_\nu.$$

Отсюда выводится второе необходимое условие:

(29) $$s_1^2 - s_2 > 0.$$

Условия (28) и (29) являются также достаточными. В самом деле,

$$s_1 = -a_1, \quad s_1^2 - s_2 = 2a_2.$$

Таким образом, если условия (28) и (29) выполнены, то для уравнения

(30) $$1 + a_1x + a_2x^2 = 0$$

имеем

(31) $$a_1 \leqslant 0, \quad a_2 > 0.$$

Если при этом корни уравнения (30) вещественны, то из (31) следует, что они положительны. Если же они сопряженно комплексны:

$$x_1 = re^{i\varphi}, \quad x_2 = re^{-i\varphi},$$

то имеем

$$-\frac{a_1}{a_2} = 2\rho\cos\varphi \geqslant 0.$$

В обоих случаях *HF*-проблема имеет решение при $m = 2$, и мы приходим к следующей теореме:

Вещественный полином второй степени H-продолжаем тогда и только тогда, если он сам является H-полиномом.

Дальнейшее исследование показывает, что эта теорема не распространяется на полиномы высших степеней.

§. 4. *SF*-полиномы. Под однолистным полиномом (будем для краткости называть его *S*-полиномом) мы разумеем полином

$$w = f(z),$$

отображающий единичный круг $|z| < 1$ в плоскости z на однолистную область в плоскости w. Другими словами, однолистный полином должен для всяких различных значений z_1, z_2 области $|z| < 1$ всегда давать различные значения $f(z_1)$, $f(z_2)$.

Для однолистных полиномов имеет место следующий критерий Дьёдонне:

Чтобы полином

$$f(z) = z + a_2z^2 + \ldots + a_nz^n$$

был S-полиномом, необходимо и достаточно, чтобы полином

$$K(z, \theta)=\frac{f(ze^{i\theta})-f(ze^{-i\theta})}{ze^{i\theta}-ze^{-i\theta}}=1+a_2\frac{\sin 2\theta}{\sin\theta}z+\ldots+a_n\frac{\sin n\theta}{\sin\theta}z^{n-1}$$

не имел ни при одном значении θ корней внутри области $|z|<1$.

Под SF-полиномом мы будем разуметь полином, который можно так продолжить, чтобы продолженный полином был S-полиномом. Несколько изменим и уточним это определение:

Будем называть SF-полиномом полином $f(z)$, который можно так продолжить до полинома

$$F(z)=f(z)+z^{n+1}\varphi(z)$$

m-й степени, чтобы $F(z)$ был однолистным в области $|z|<1-\varepsilon$. При этом, выбрав m достаточно большим, можно сделать $\varepsilon>0$ сколь угодно малым.

SF-полином можно продолжить до регулярной и однолистной внутри $|z|<1$ аналитической функции. В самом деле, зададим последовательность $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots$ положительных чисел, стремящуюся к нулю. Обозначая через $F_\nu(z)$ полином типа $f(z)+z^{n+1}\varphi(z)$, однолистный в области $|z|<1-\varepsilon_\nu$ ($\nu=1, 2, 3, \ldots$), мы получим последовательность полиномов

$$F_1(z), \quad F_2(z), \quad F_3(z), \quad \ldots, \tag{32}$$

нормальную в каждой области $|z|<1-\varepsilon$, так как каждый из полиномов $F_\nu(z)$ имеет в силу известного свойства однолистных функций:

$$|a_m|<me \quad (m=2, 3, 4, \ldots),$$

мажоранту

$$F_\nu(z)\ll z+\sum_{m=2}^{\infty}\frac{me}{(1-\varepsilon_\nu)^m}z^m,$$

которая регулярна внутри области $|z|<1-\varepsilon_\nu$. Следовательно, из последовательности (32) можно выделить подпоследовательность, равномерно стремящуюся к некоторой аналитической функции, которая, очевидно, регулярна внутри области $|z|<1$. Функция $F(z)$ однолистна внутри $|z|<1$. В самом деле, в противном случае существовали бы значения z_1, z_2,

$$|z_1|<1, \quad |z_2|<1,$$

такого рода, что имело бы место равенство

$$F(z_1)=F(z_2).$$

Тогда, сколь бы мало ни было $\varepsilon>0$, всегда существует такое ν, что

$$|F_\nu(z_1)-F_\nu(z_2)|<\varepsilon. \tag{33}$$

Окружим z_1 и z_2 кругами радиусов соответственно

$$\frac{1-|z_1|}{2}, \quad \frac{1-|z_2|}{2}.$$

Тогда в силу теоремы искажения (Verzerrungssatz) эти круги перейдут в области, границы которых имеют минимальные расстояния до $F_\nu(z_1)$,

соответственно $F_\nu(z_2)$, стремящиеся к нулю с возрастанием ν. Стало быть, эти области должны в силу (33) частично перекрываться, что противоречит однолистности полинома $F_\nu(z)$.

С другой стороны, всякую однолистную внутри $|z|<1$ функцию можно аппроксимировать однолистными внутри $|z|<1-\varepsilon$ полиномами, как бы мало ε ни было [3]). Этим все доказано.

Можно еще поставить вопрос несколько иначе. Именно, представляет интерес определить, в каком возможно большем круге заданный полином $f(z)$ однолистен или однолистно продолжаем. Последнюю задачу можно следующим образом модифицировать:

Найти для заданных полинома $f(z)$ и числа m полином

$$F(z)=f(z)+z^{n+1}\varphi(z)$$

m-й степени, который был бы однолистен внутри возможно большей области типа $|z|<R$.

Обратим внимание на то, что такой „максимальный полином“ $F(z)$ обладает некоторыми экстремальными свойствами, которые его вполне характеризуют. Именно, при любой вариации коэфициентов полинома $\varphi(z)$ „радиус однолистности“ полинома $F(z)$ может только уменьшаться. Это позволяет свести проблему к чисто алгебраической задаче. Однако, чтобы решить эту задачу до конца, необходимо улучшить относящуюся к ней выкладочную технику.

§ 5. Дальнейшие обобщения основной проблемы. Можно формулировать нашу $\mathfrak{M}F$-проблему следующим образом:

Заданы: бесконечная последовательность линейно независимых функций

$$\varphi_0=1,\quad \varphi_1=z,\quad \varphi_2=z^2,\quad \ldots \tag{34}$$

и точечное множество $\mathfrak{M}$ на плоскости z. Найти полином

$$\varphi_0+A_1\varphi_1+\ldots+A_m\varphi_m,$$

первые n коэфициентов которого A_1, A_2, ..., A_n заданы и корни которого лежали бы на $\mathfrak{M}$.

Подвергая переменную z преобразованию (которое мы для простоты предположим однозначно обратимым), мы преобразуем последовательность (34) в другую последовательность, множество $\mathfrak{M}$ — в другое множество $\mathfrak{M}_1$; однако условия решаемости проблемы останутся теми же. Следовательно, характер этих условий зависит от взаимных отношений последовательности (34) и множества $\mathfrak{M}$, остающихся инвариантными при всяком одновременном конформном преобразовании. Что характер этих условий может быть различным, показывает, например, сравнение RF-проблемы (§ 1) с KF-проблемой (§ 2).

Можно поставить обратную задачу: Каково должно быть взаимоотношение последовательности (34) и множества $\mathfrak{M}$ для того, чтобы усло-

---

[3]) См. V. Levin, Bemerkung zu den schlichten Abbildungen des Einheitskreises, Jahresbericht Deutsche Mathematiker-Vereinigung, т. 42 (1932), стр. 68—70, где показано, что всякая частная сумма n-й степени степенного ряда функции, однолистной внутри $|z|<1$, однолистна внутри $|z|<1-6\frac{\ln n}{n}$ при $n\geqslant 17$. См. также M. I. S. Robertson, On the theory of univalent functions, Ann. of Math., т. 37 (1936), стр. 404.

вия решаемости обобщенной проблемы имели наперед заданный характер? Например, чтобы проблема всегда имела решение? Или, например, чтобы только $\mathfrak{M}$-полиномы были $\mathfrak{M}$-продолжаемы?

В заключение решим RF-проблему для $n=2$, выбирая в качестве последовательности полиномов

$$\varphi_0=1, \quad \varphi_1=1+z, \quad \varphi_2=1+z+z^2, \quad \ldots$$

Из тождества

$$a_0+a_1z+a_2z^2+\ldots+a_mz^m= \\ =A_0\cdot 1+A_1(1+z)+\ldots+A_m(1+z+\ldots+z^m)$$

мы получим

$$\begin{aligned} a_0&=A_0+A_1+A_2+\ldots+A_m,\\ a_1&=\quad A_1+A_2+\ldots+A_m,\\ a_2&=\qquad A_2+\ldots+A_m,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ a_m&=\qquad\qquad A_m. \end{aligned}$$

Стало быть, наперед заданы только коэфициенты

$$A_0=a_0-a_1, \quad A_1=a_1-a_2, \quad A_2=a_2-a_3.$$

Полагая

$$a_1=a_0-A_0, \quad a_2=a_0-A_0-A_1, \quad a_3=a_0-A_0-A_1-A_2,$$

где мы должны считать A_0, A_1, A_2 постоянными числами и a_0 — вещественным параметром, мы вставим эти выражения в условие решаемости

$$s_2^3-s_3^2=3\frac{a_1^2}{a_0^2}\frac{a_2^2}{a_0^2}-8\frac{a_2^3}{a_0^3}-6\frac{a_1^3}{a_0^3}\frac{a_3}{a_0}+18\frac{a_1}{a_0}\frac{a_2}{a_0}\frac{a_3}{a_0}-9\frac{a_3^2}{a_0^2}>0$$

RF-проблемы для $n=3$, т. е. в неравенство

$$3a_1^2a_2^2-8a_0a_2^3-6a_1^3a_3+18a_0a_1a_2a_3-9a_0^2a_3^2>0.$$

Это дает

$$\begin{aligned} \psi(a_0)=&3(a_0-A_0)^2(a_0-A_0-A_1)^2-8a_0(a_0-A_0-A_1)^3-\\ &-6(a_0-A_0)^3(a_0-A_0-A_1-A_2)+\\ &+18a_0(a_0-A_0)(a_0-A_0-A_1)(a_0-A_0-A_1-A_2)-\\ &-9a_0^2(a_0-A_0-A_1-A_2)^2>0. \end{aligned}$$

Полином $\psi(a_0)$ четвертой степени относительно переменной a_0 имеет в качестве старшего члена

$$-2a_0^4, \tag{35}$$

а в качестве постоянного члена

$$3A_0^2(A_0+A_1)^2-6A_0(A_0+A_1+A_2)^3. \tag{36}$$

Чтобы существовало значение a_0, для которого бы имело место $\psi(a_0)>0$, необходимо и достаточно, чтобы не все корни полинома $\psi(u)$ были мнимыми. В частности, это условие всегда будет выполнено, если выражение (36) будет иметь положительное значение. Предоставим читателю подробно выписать необходимые и достаточные условия решаемости этой проблемы.

Я надеюсь, что для более общих проблем этого типа будут найдены более тонкие методы, чем приведенные грубые соображения.

Д. А. Граве со своими учениками (слева направо)
М. Г. Крейном, Н. И. Ахиезером и Н. Г. Чеботаревым.

ЗАДАЧА ИЗ ТЕОРИИ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ЧИСЕЛ.

Н. Г. Чеботарев (Казань).

В одной из моих прежних работ [1]) я привел вопрос о существовании некоторых относительно абелевых числовых полей к проблеме существования l-примарных простых идеалов $\mathfrak{p}$ внутри заданного нормального алгебраического числового поля k, для которых символ степенного вычета

$$\left\{\frac{\Pi_2\Pi_3\ldots\Pi_k}{\mathfrak{p}}\right\} \tag{1}$$

имел бы заданное значение. Здесь

$$\mathfrak{p}=\mathfrak{p}_1,\quad \mathfrak{p}_2,\ldots,\quad \mathfrak{p}_k$$

означают сопряженные с $\mathfrak{p}$ простые идеалы, а

$$\Pi_i=\mathfrak{p}_i\mathfrak{q}_i^l \quad (i=1,\ 2,\ldots,\ k)$$

— сопряженные друг с другом целые числа поля k, причем

$$(\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2\ldots\mathfrak{p}_k,\ \mathfrak{q}_i)=1 \quad (i=1,\ 2,\ldots,\ k).$$

В силу примарности идеала $\mathfrak{p}$ значение символа (1) не зависит от выбора идеалов $\mathfrak{q}_i$.

Эта задача казалась мне неразрешимой средствами современных методов аналитической теории чисел, так как я не мог привести ее к задаче Фробениуса о существовании простых идеалов, принадлежащих к различным подстановкам группы поля. В настоящее время мне удалось решить эту задачу для случая $l=2$ для мнимых квадратичных полей $k(\sqrt{-m})$, где m — целое нечетное лишенное квадратов число, представимое в форме x^2+y^2.

§ 1. В дальнейшем нам понадобятся формулы, выражающие лежандровы символы в иррациональных алгебраических числовых полях через символы в поле рациональных чисел. Эти формулы были получены Ф. Фуртвенглером [2]) для относительно нормальных полей и Т. Такаги [3]) для общего случая.

---

[1]) N. Tschebotarö w, Untersuchungen über relativ Abelsche Zahlkörper, Journal für die reine und angewandte Mathematik, т. 167 (1932), стр. 98—121.

[2]) Ph. Furtwängler, Über die Reziprozitätsgesetze zwischen l-ten Potenzresten in algebraischen Zahlkörpern, wenn l eine ungerade Primzahl bedeutet, Math. Ann., т. 58 (1904), стр. 24.

[3]) T. Takagi, Über das Reziprozitätsgesetz in einem beliebigen algebraischen Zahlkörper, Journ. of Coll. of Sc. Imp. Univ. Tôkjo, т. 44 (1922), стр. 10.

Будем обозначать через $\{\ldots\}$ символ l-го степенного вычета в поле K, через $(\ldots)$ — в его делителе k и через $N(\ldots)$ — относительную норму чисел и идеалов поля K по отношению к k. Тогда имеет место равенство

$$\left\{\frac{\alpha}{\mathfrak{B}}\right\} = \left(\frac{\alpha}{N(\mathfrak{B})}\right), \tag{2}$$

где α — число из k, а $\mathfrak{B}$ — идеал из K. Далее, имеет место равенство

$$\left\{\frac{A}{\mathfrak{c}}\right\} = \left(\frac{N(A)}{\mathfrak{c}}\right), \tag{3}$$

где A — число из K и $\mathfrak{c}$ — идеал из k.

§ 2. Пусть k — поле рациональных чисел и K — мнимое квадратичное поле:

$$K = k(\sqrt{-m}),$$

где m — целое, положительное, нечетное и лишенное квадратов число. Далее, предположим, что m представимо в форме суммы двух квадратов:

$$m = \xi^2 + \eta^2.$$

Это означает, что каждый простой множитель q_i числа m:

$$m = q_1 q_2 \ldots q_s, \tag{4}$$

удовлетворяет сравнению

$$q_i \equiv 1 \pmod 4 \quad (i = 1, 2, \ldots, s). \tag{5}$$

Базис поля K может быть представлен в форме

$$[1, \sqrt{-m}].$$

Условие: число

$$p = N(a + b\sqrt{-m}) = a^2 + mb^2 \tag{6}$$

должно быть нечетным простым числом, — требует выполнения одной из следующих двух систем сравнений:

$$a \equiv 1 \pmod 2, \quad b \equiv 0 \pmod 2 \tag{7}$$

или

$$a \equiv 0 \pmod 2, \quad b \equiv 1 \pmod 2. \tag{8}$$

В первом случае искомый символ $\left\{\frac{a - b\sqrt{-m}}{a + b\sqrt{-m}}\right\}$ может быть преобразован так:

$$\left\{\frac{a - b\sqrt{-m}}{a + b\sqrt{-m}}\right\} = \left\{\frac{2a}{a + b\sqrt{-m}}\right\} = \left(\frac{2a}{a^2 + mb^2}\right) = \tag{9}$$

$$= \left(\frac{2}{a^2 + mb^2}\right)\left(\frac{m}{a}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{4}}\left(\frac{a}{m}\right).$$

Символ Якоби $\left(\frac{a}{m}\right)$ в силу (4) может быть представлен так:

$$\left(\frac{a}{m}\right) = \left(\frac{a}{q_1}\right)\left(\frac{a}{q_2}\right)\ldots\left(\frac{a}{q_s}\right).$$

Каждый из символов $\left(\frac{a}{q_i}\right)$ имеет значение $+1$ тогда и только тогда, если сравнение

(10) $$\xi^2 \equiv a \pmod{q_i}$$

имеет рациональные решения. Но так как

(11) $$p \equiv a^2 \pmod{q_i},$$

то $\left(\frac{a}{q_i}\right) = +1$ тогда и только тогда, если p есть *биквадратичный вычет* по модулю q_i. Необходимость этого условия очевидна. С другой стороны, если

$$p \equiv \xi_1^4 \pmod{q_i},$$

то в силу (6) или

$$a \equiv \xi_1^2 \pmod{q_i},$$

или

$$a \equiv -\xi_1^2 \pmod{q_i}.$$

Оба значения a в силу

(12) $$q_i \equiv 1 \pmod 4$$

являются квадратичными вычетами по модулю q_i. Это означает, что символ $\left(\frac{a}{q_i}\right)$ имеет значение $+1$. Если нам предоставлено выбрать по произволу класс сравнений по модулю q_i, в котором должно лежать p, лишь с тем ограничением, что p должно быть квадратичным вычетом по модулю q_i, то мы имеем в своем распоряжении $\frac{p-1}{4}$ биквадратичных вычетов и $\frac{p-1}{4}$ невычетов. Для первых имеет место $\left(\frac{a}{q_i}\right) = +1$, для вторых $\left(\frac{a}{q_i}\right) = -1$.

Обращаясь к случаю (8) и полагая

$$a = 2^\lambda a_1, \quad (a_1, 2) = 1,$$

мы будем иметь

(13) $$\left\{\frac{a - b\sqrt{-m}}{a + b\sqrt{-m}}\right\} = \left(\frac{2a}{a^2 + mb^2}\right) = \left(\frac{2}{a^2 + mb^2}\right)^{\lambda+1} \left(\frac{m}{a_1}\right) =$$
$$= (-1)^{\frac{p-1}{4}(\lambda+1)} \left(\frac{a_1}{m}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{4}(\lambda+1)} (-1)^{\frac{m-1}{4}\lambda} \left(\frac{a}{m}\right).$$

Подвергнем простое число p дальнейшему ограничению:

(14) $$p \equiv m \pmod 8.$$

Тогда оба выражения (9) и (13) приобретают одну и ту же форму:

(15) $$\left\{\frac{a - b\sqrt{-m}}{a + b\sqrt{-m}}\right\} = (-1)^{\frac{m-1}{4}} \left(\frac{a}{m}\right),$$

так что теперь мы можем не различать случаев (7) и (8). Таким образом мы видим, что значение нашего символа

$$\left\{\frac{a - b\sqrt{-m}}{a + b\sqrt{-m}}\right\}$$

вполне определится, если мы будем знать класс сравнений по модулю $8m$, в котором лежит p.

§ 3. Особого рассмотрения требует случай, когда K есть гауссово поле: $K = k(i)$. Тогда мы можем нормировать число $a + bi$ при помощи единиц ± 1, $\pm i$ таким образом, чтобы было

$$a > 0, \quad a \equiv 1 \pmod 2, \quad b \equiv 0 \pmod 2,$$

и искомый символ может быть преобразован так:

$$\left\{\frac{a-bi}{a+bi}\right\} = \left\{\frac{2a}{a+bi}\right\} = \left(\frac{2a}{a^2+b^2}\right) = \tag{16}$$
$$= \left(\frac{2}{a^2+b^2}\right)\left(\frac{a}{a^2+b^2}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{4}}.$$

Условие примарности

$$\left\{\frac{i}{a+bi}\right\} = 1$$

требует, чтобы значения символов

$$\left\{\frac{a-bi}{a+bi}\right\}, \quad \left\{\frac{b+ai}{a+bi}\right\}$$

были равны друг другу. Отсюда следует

$$\left\{\frac{a-bi}{a+bi}\right\} = \left\{\frac{b+ai}{b-ai}\right\} = \left\{\frac{2b}{b-ai}\right\} = \left(\frac{2b}{a^2+b^2}\right). \tag{17}$$

Стало быть, в силу (16) мы будем иметь

$$\left(\frac{4ab}{a^2+b^2}\right) = \left(\frac{2a}{a^2+b^2}\right)\left(\frac{2b}{a^2+b^2}\right) = 1,$$

откуда получаем

$$1 = \left(\frac{4ab}{a^2+b^2}\right) = \left(\frac{2(a+b)^2 - 2(a^2+b^2)}{a^2+b^2}\right) = \left(\frac{2}{a^2+b^2}\right).$$

Это условие можно также написать так:

$$p \equiv 1 \pmod 8. \tag{18}$$

Если это условие выполняется, то значение искомого символа $\left\{\frac{a-bi}{a+bi}\right\}$ в силу (16) равно $+1$. Таким образом наша задача допускает решение *в отрицательном смысле*.

§ 4. Вернемся опять к общему случаю § 2. Чтобы найти главные простые идеалы $(a + b\sqrt{-m})$, удовлетворяющие условию

$$\left\{\frac{a-b\sqrt{-m}}{a+b\sqrt{-m}}\right\} = \varepsilon, \tag{19}$$

достаточно найти рациональные простые числа $p = N(a + b\sqrt{-m})$, подчиненные следующим условиям:

1) p должны разлагаться внутри $k(\sqrt{-m})$ на два различных простых идеала.

2) p должны быть примарными, т. е. иметь форму $4k+1$. Более того, они должны удовлетворять условию

$$p \equiv m \pmod 8.$$

3) p должны быть квадратичными вычетами по модулям q_i $(i=1, 2, \ldots, s)$:

$$\left(\frac{p}{q_i}\right) = +1 \quad (i=1, 2, \ldots, s).$$

4) Обозначая через ε_i $+1$ или -1 в зависимости от того, есть ли p *биквадратичный* вычет или невычет по модулю q_i (допуская, что условие 3) уже выполнено), потребуем, чтобы имело место

$$\varepsilon_1\varepsilon_2 \ldots \varepsilon_s = (-1)^{\frac{m-1}{4}}\varepsilon, \tag{20}$$

где ε — заданная величина, равная $+1$ или -1.

Условие 1) может быть следующим образом видоизменено на основании свойств *поля классов*. В силу определения поля классов[4]) простое число p является нормой главного идеала первой степени поля K тогда и только тогда, если p является нормой идеала первой степени поля $\mathfrak{K}$, где $\mathfrak{K}$ означает поле классов поля K. Поэтому условие 1) равносильно следующему условию:

1′) p должны принадлежать к тождественной подстановке внутри поля $\mathfrak{K}$.

Условия 2), 3), 4) также могут быть формулированы подобным же образом. Для этого мы введем в рассмотрение поле K_1 $8m$-ых корней из единицы. Тогда условия 2), 3), 4) равносильны следующему условию:

2′) p должны принадлежать внутри поля K_1 к определенному классу подстановок.

Вопрос о существовании бесчисленного множества простых чисел, принадлежащих внутри двух различных полей $\mathfrak{K}$ и K_1 к заданным классам подстановок, имеет утвердительный или отрицательный ответ в зависимости от того, вызывают ли обе заданные внутри обоих полей подстановки одну и ту же или разные подстановки среди величин пересечения K_2 полей $\mathfrak{K}$ и K_1[5]).

K_1, а потому и K_2 являются абсолютно абелевыми полями. С другой стороны, наибольшее абсолютно абелево частичное поле классов квадратичного поля $K=k(\sqrt{-m})$ есть поле $k(i, \sqrt{-q_1}, \sqrt{-q_2}, \ldots, \sqrt{-q_s})$[6]). Это поле действительно содержится в K_1, а потому

$$K_2 = k(i, \sqrt{-q_2}, \ldots, \sqrt{-q_s}). \tag{21}$$

---

[4]) H. Hasse, Bericht über neuere Untersuchungen und Probleme aus der Theorie der algebraischen Zahlkörper, Teil I: Klassenkörpertheorie, Jber. D. M.-V., т. 35 (1926), стр. 4, Definition 1°.

[5]) N. Tschebotareff, Die Bestimmung der Dichtigkeit einer Menge von Primzahlen, die zu einer gegebenen Substitutionsklasse gehören, Math. Ann., т. 95 (1925), стр. 213.

[6]) N. Tschebotarөw, Zur Gruppentheorie des Klassenkörpers, Journal für die reine und angewandte Mathematik, т. 161 (1929), стр. 193. Beispiel.

Тождественной подстановке в $\mathfrak{K}$, очевидно, соответствует подстановка в K. Таким образом остается лишь доказать, что также подстановка в K_2, вызванная подстановкой из K_1, определенной условиями 2), 3), 4), есть тождественная подстановка. Условия того, чтобы p внутри K_2 разлагалось на простые идеалы первой степени, состоит в выполнении сравнений

$$(22)\quad \left(\frac{-1}{p}\right)=+1,\quad \left(\frac{q_1}{p}\right)=+1,\quad \left(\frac{q_2}{p}\right)=+1,\quad \ldots,\quad \left(\frac{q_s}{p}\right)=+1.$$

Эти условия, за исключением первого, совпадают в силу лежандрова закона взаимности с условием 3), а первое из этих условий содержится в условии 2). Таким образом существование искомых простых чисел доказано.

§ 5. Я позволю себе остановиться на тех трудностях, которые связаны с решением нашей задачи в других случаях. Рассмотрим все типы мнимых квадратичных полей и проведем для каждого из этих типов рассуждения, подобные тем, которые мы применили при выводе формул (9) и (13).

1. $K=k(\sqrt{-m})$, $m\equiv 1 \pmod 4$. Базисом является

$$[1,\ \sqrt{-m}].$$

Формулы (9) и (13) сохраняются в силе:

$$(23)\quad \left\{\frac{a-b\sqrt{-m}}{a+b\sqrt{-m}}\right\}=(-1)^{\frac{p-1}{4}}\left(\frac{a}{m}\right)\quad [a\equiv 1 \pmod 2,\quad b\equiv 0 \pmod 2];$$

$$(24)\quad \left\{\frac{a-b\sqrt{-m}}{a+b\sqrt{-m}}\right\}=(-1)^{\frac{p-1}{4}(\lambda+1)}(-1)^{\frac{m-1}{4}\lambda}\left(\frac{a}{m}\right)$$
$$[b\equiv 1 \pmod 2,\quad a=2^{\lambda}a_1,\quad (a_1,2)=1].$$

Но здесь мы должны допустить, что m содержит также простые множители вида $4k+3$. Пусть q_1 будет один из таких множителей. Тогда

$$\left(\frac{a}{q_1}\right)=-\left(\frac{-a}{q_1}\right),$$

так что здесь нормирование $a>0$ существенно. С другой стороны, сравнение

$$\xi^4\equiv p \pmod{q_1}$$

при $q_1\equiv 3 \pmod 4$ всегда имеет два и только два рациональных решения. Мы не имеем способа различать, имеет ли при этом сравнение

$$\xi^2\equiv a \pmod{q_1},\quad a>0$$

рациональные решения или нет.

Формулу (23) можно записать следующим образом:

$$(25)\quad \left\{\frac{a-b\sqrt{-m}}{a+b\sqrt{-m}}\right\}=(-1)^{\frac{p-1}{4}}\prod_{i=1}^{s}(-1)^{\frac{a-1}{2}\frac{q_i-1}{2}}\left(\frac{a}{q_i}\right).$$

Здесь каждый множитель

$$(-1)^{\frac{a-1}{2}\frac{q_i-1}{2}}\left(\frac{a}{q_i}\right) \quad (i=2,\ 3,\ \ldots,\ s)$$

не зависит от выбора знака при a. Но зато он зависит от поведения числа a по модулю 4, каковое нельзя охарактеризовать никаким свойством сравнения для числа p.

II. $K=k(\sqrt{-m})$, $m\equiv 3 \pmod 4$. Базисом является

$$\left[1,\ \frac{1+\sqrt{-m}}{2}\right].$$

Поэтому целые нечетные числа поля K могут быть представлены или в виде

(26) $$\frac{a}{2}+\frac{b}{2}\sqrt{-m},$$

где

$$a\equiv 1 \pmod 2, \quad b\equiv 1 \pmod 2,$$

или в виде

$$a+b\sqrt{-m},$$

где либо

(27) $$a\equiv 1 \pmod 2, \quad b\equiv 0 \pmod 2,$$

либо

(28) $$a\equiv 0 \pmod 2, \quad b\equiv 1 \pmod 2.$$

В случае (26) имеем

$$\left\{\frac{\frac{a}{2}-\frac{b}{2}\sqrt{-m}}{\frac{a}{2}+\frac{b}{2}\sqrt{-m}}\right\}=\left\{\frac{a}{\frac{a}{2}+\frac{b}{2}\sqrt{-m}}\right\}=\left(\frac{a}{(a^2+mb^2)/4}\right)=$$

$$=\left(\frac{(a^2+mb^2)/4}{a}\right)=\left(\frac{a^2+mb^2}{a}\right)=\left(\frac{m}{a}\right)=(-1)^{\frac{a-1}{2}}\left(\frac{a}{m}\right)=$$

$$=\prod_{i=1}^{s}(-1)^{\frac{a-1}{2}\frac{q_i-1}{2}}\left(\frac{a}{q_i}\right).$$

Здесь сохраняют свою силу все замечания к случаю I.

Аналогично в случае (27) получим

$$\left\{\frac{a-b\sqrt{-m}}{a+b\sqrt{-m}}\right\}=\left\{\frac{2a}{a+b\sqrt{-m}}\right\}=\left(\frac{2a}{a^2+mb^2}\right)=\left(\frac{2}{a^2+mb^2}\right)\left(\frac{m}{a}\right)=$$

$$=(-1)^{\frac{p-1}{4}}(-1)^{\frac{a-1}{2}}\left(\frac{a}{m}\right)=(-1)^{\frac{p-1}{4}}\prod_{i=1}^{s}(-1)^{\frac{a-1}{2}\frac{q_i-1}{2}}\left(\frac{a}{q_i}\right).$$

В случае (28) число p не примарно.

III. Случай $K=k(\sqrt{-3})$ отличается от случая II тем, что поле $k(\sqrt{-3})$ содержит нетривиальные единицы

$$\varepsilon=\frac{-1+\sqrt{-3}}{2},\quad \varepsilon^2=\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}.$$

Можно было бы ожидать, что здесь условие примарности наложит на простые числа новые ограничения. Это, однако, не имеет места, так как

$$\left\{\frac{\varepsilon}{\omega}\right\}=\left\{\frac{\varepsilon^2}{\omega}\right\}^2=+1,$$

где ω означает простое число поля $k(\sqrt{-3})$.

IV. Случай $K=k(\sqrt{-2m})$, $m\equiv 1 \pmod 2$. Базисом является

$$[1,\ \sqrt{-2m}].$$

Имеем

$$a\equiv 1 \pmod 2,\quad b\equiv 0 \pmod 2,$$

так как условие примарности

$$\left\{\frac{-1}{a+b\sqrt{-2m}}\right\}=\left(\frac{-1}{a^2+2mb^2}\right)=1$$

требует соблюдения сравнения

$$a^2+2mb^2\equiv 1 \pmod 4.$$

Отсюда следует

$$p=a^2+2mb^2\equiv 1 \pmod 8.$$

Имеем

$$\left\{\frac{a-b\sqrt{-2m}}{a+b\sqrt{-2m}}\right\}=\left(\frac{2a}{a^2+2mb^2}\right)=\left(\frac{a^2+2mb^2}{a}\right)=\left(\frac{2}{a}\right)\left(\frac{m}{a}\right)=$$

$$=(-1)^{\frac{a^2-1}{8}}(-1)^{\frac{a-1}{2}\cdot\frac{m-1}{2}}\left(\frac{a}{m}\right).$$

Чтобы решить нашу задачу для всех этих случаев, необходимо определить плотность простых чисел вида

$$a+b\sqrt{-m},$$

которые бы удовлетворяли условиям

$$a>0,\quad a\equiv 1 \pmod 4.$$

Для этой цели может оказаться полезным следующий обобщенный L-ряд:

$$L(s)=\sum_{a,\,b}\frac{a+b\sqrt{-m}}{(a^2+mb^2)^s},$$

где a пробегает все (положительные и отрицательные) целые числа вида $4k+1$, а b — все (или соответственно все четные) целые числа, в зависимости от типа поля $k(\sqrt{-m})$. Я надеюсь исследовать этот вопрос в дальнейшей работе.

Д. А. Граве и О. Ю. Шмидт.

ГРУППЫ С ДВУМЯ КЛАССАМИ НЕИНВАРИАНТНЫХ ПОДГРУПП.

О. Ю. Шмидт (Москва).

Как известно, всякая группа, все подгруппы которой инвариантны, является абелевой или гамильтоновой группой. Автором настоящей работы были исследованы группы, имеющие только один класс неинвариантных подгрупп [1]). В настоящей работе определены все типы групп с двумя классами неинвариантных подгрупп.

Автор пользуется случаем выразить благодарность своему дорогому ученику Владимиру Константиновичу Туркину за самоотверженную помощь при подготовке настоящей статьи к печати.

§ 1. Лемма. *Пусть* $\mathfrak{G}$ *есть группа порядка* g *и* $\mathfrak{P}$ *— ее подгруппа Силова порядка* p^α (p *— простое число*). *Пусть индекс нормализатора* $\mathfrak{N}$ *подгруппы* $\mathfrak{P}$ *относительно группы* $\mathfrak{G}$ *равен* i. *Если* $\mathfrak{P}$ *входит в инвариантную подгруппу* $\mathfrak{H}$, *то индекс пересечения* $\mathfrak{H}$ *и* $\mathfrak{N}$ *относительно* $\mathfrak{H}$ *также равен* i.

Доказательство. Подгруппы Силова порядка p^α все сопряжены между собой; из этого следует, что число их равно i. Действительно, если разложить группу $\mathfrak{G}$ по модулю $\mathfrak{N}$:

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{N} + \mathfrak{N}G_2 + \mathfrak{N}G_3 + \ldots + \mathfrak{N}G_l,$$

то два элемента, принадлежащие к одной и той же смежной системе $\mathfrak{N}G_k$, преобразуют подгруппу $\mathfrak{P}$ в одну и ту же сопряженную подгруппу, а два элемента, принадлежащие к различным смежным системам, переводят $\mathfrak{P}$ в различные сопряженные подгруппы. Таким образом число подгрупп, сопряженных с $\mathfrak{P}$, равно i. Если $\mathfrak{P}$ входит в инвариантную подгруппу $\mathfrak{H}$, то и все подгруппы, сопряженные с $\mathfrak{P}$, содержатся в $\mathfrak{H}$. При этом все они сопряжены с $\mathfrak{P}$ внутри $\mathfrak{H}$, так как $\mathfrak{P}$ является для группы $\mathfrak{H}$ подгруппой Силова. Разлагая $\mathfrak{H}$ по модулю $\mathfrak{D}$, где $\mathfrak{D}$ есть пересечение групп $\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{N}$, мы убедимся в том, что число подгрупп, сопряженных с $\mathfrak{P}$, равно индексу $\mathfrak{D}$ относительно $\mathfrak{H}$, что и доказывает нашу лемму.

Следствие. *Если* $\mathfrak{P}$ *не инвариантна в* $\mathfrak{G}$, *то и всякая подгруппа* $\mathfrak{H}$, *содержащая* $\mathfrak{N}$ (*в частности, сама* $\mathfrak{N}$), *не может быть инвариантной в* $\mathfrak{G}$.

---

[1]) О. Ю. Шмидт, Группы, имеющие только один класс неинвариантных подгрупп, Математический сборник, т. XXXIII, вып. 2, стр. 161—172.

Действительно, если $\mathfrak{H}$ инвариантна в $\mathfrak{G}$, то мы можем применить доказанную лемму, причем теперь $\mathfrak{D} = \mathfrak{N}$. Из равенства индексов $\mathfrak{N}$ относительно $\mathfrak{G}$ и $\mathfrak{D}$ относительно $\mathfrak{H}$ заключаем, что $\mathfrak{H}$ должна совпадать с $\mathfrak{G}$.

§ 2. Найдем *неспециальные*[2]) искомые группы. Пусть $\mathfrak{G}$ — неспециальная группа. Тогда не все ее подгруппы Силова инвариантны. Пусть $\mathfrak{P}$ порядка p^α есть неинвариантная подгруппа Силова. Кроме подгрупп, сопряженных с $\mathfrak{P}$, в $\mathfrak{G}$ должен иметься еще один класс неинвариантных подгрупп. Пусть $\mathfrak{M}$ есть одна из подгрупп, входящих в этот другой класс. Возможны три случая: 1) $\mathfrak{M}$ содержит одну из групп, сопряженных с $\mathfrak{P}$; 2) $\mathfrak{M}$ содержится в одной из групп, сопряженных с $\mathfrak{P}$; 3) не имеет места ни то, ни другое. Согласно следствию из леммы § 1, в случаях 2) и 3) нормализатор $\mathfrak{N}$ группы $\mathfrak{P}$ совпадает с этой группой, так как в противном случае он входил бы в *третий* класс неинвариантных подгрупп.

Докажем, что порядок группы $\mathfrak{G}$ не может делиться более чем на три различных простых числа. В самом деле, предположим, что этот порядок делится более чем на два различных простых числа. Тогда по крайней мере одна подгруппа Силова группы $\mathfrak{G}$ должна быть инвариантной; пусть это будет подгруппа $\mathfrak{Q}$ порядка q^β (q — простое число). Очевидно, $\mathfrak{PQ}$ есть группа порядка $p^\alpha q^\beta$. Если $\mathfrak{PQ}$ является инвариантной подгруппой группы $\mathfrak{G}$, то по лемме § 1 $p^\alpha q^\beta$ делится на i, т. е. $i = q^\rho$. Но тогда нормализатор $\mathfrak{N}$ группы $\mathfrak{P}$ должен содержать одну из подгрупп Силова, порядка, отличного от p^α и q^β, группы $\mathfrak{G}$. Пусть это будет группа $\mathfrak{R}$, порядка r^γ (r — простое число). Каждый элемент $\mathfrak{R}$ перестановочен с $\mathfrak{P}$; следовательно, $\mathfrak{PR}$ есть группа. Эта группа по лемме § 1 не может быть инвариантной, так как ее порядок не делится на $i = q^\rho$. Следовательно, $\mathfrak{PR}$ входит во второй класс неинвариантных подгрупп. Так как $\mathfrak{N}$ входит в тот же класс (согласно следствию из леммы § 1 $\mathfrak{N}$ не может быть инвариантной подгруппой), то мы можем положить $\mathfrak{PR} = \mathfrak{N}$. Мы получили, что порядок $\mathfrak{N}$ равен $p^\alpha r^\gamma$ и порядок $\mathfrak{G}$ равен $p^\alpha q^\beta r^\gamma$.

Разберем случай, когда порядок группы $\mathfrak{G}$ имеет вид $p^\alpha q^\beta r^\gamma$. В этом случае подгруппы $\mathfrak{Q}$ и $\mathfrak{R}$ инвариантны, $\mathfrak{QR}$ есть прямое произведение своих подгрупп Силова и, следовательно, всякий элемент группы $\mathfrak{Q}$ перестановочен со всяким элементом группы $\mathfrak{R}$. В группе $\mathfrak{PR}$ подгруппы Силова также инвариантны; следовательно, всякий элемент подгруппы $\mathfrak{P}$ перестановочен со всяким элементом подгруппы $\mathfrak{R}$. Следовательно (подгруппа $\mathfrak{PQ}$ инвариантна в $\mathfrak{G}$), $\mathfrak{G}$ является прямым произведением подгрупп $\mathfrak{PQ}$ и $\mathfrak{R}$. Подгруппа $\mathfrak{R}$ должна быть порядка r, так как в противном случае она содержала бы собственную подгруппу $\mathfrak{R}_1$; $\mathfrak{PR}_1$ должно было бы быть инвариантной подгруппой группы $\mathfrak{G}$, а следовательно, и $\mathfrak{PR}_1\mathfrak{R} = \mathfrak{PR}$ было бы, вопреки вышедоказанному, инвариантной (подгруппой группы $\mathfrak{G}$. Что касается подгруппы $\mathfrak{PQ}$, то это — группа с одним классом неинвариантных подгрупп. На основании результатов работы[1]) мы можем теперь записать определяющие равенства группы $\mathfrak{G}$

---

[2]) Группа называется специальной, если она является прямым произведением своих подгрупп Силова.

в следующем виде:

$$\text{I}\qquad \begin{cases} P^{p^\alpha}=1, \quad Q^q=1, \quad R^r=1, \\ PQP^{-1}=Q^l, \quad l^p\equiv 1 \pmod q, \quad l\not\equiv 1 \pmod q, \\ RQ=QR, \quad RP=PR. \end{cases}$$

Порядок группы равен $p^\alpha qr$.

§ 3. Предположим теперь, что порядок группы $\mathfrak{G}$ (попрежнему неспециальной) делится только на два различных простых числа, т. е. имеет вид $p^\alpha q^\beta$.

Разберем сначала случай, когда нормализатор $\mathfrak{N}$ группы $\mathfrak{P}$ отличен от $\mathfrak{P}$. По следствию из леммы § 1 этот нормализатор не может быть инвариантным в $\mathfrak{G}$. Пусть порядок $\mathfrak{N}$ равен $p^\alpha q^\delta$. Подгруппа Силова $\mathfrak{Q}_1$ порядка q^δ этого нормализатора и все подгруппы этой подгруппы инвариантны в $\mathfrak{G}$ (поскольку в один класс неинвариантных подгрупп входит $\mathfrak{P}$, а в другой $\mathfrak{N}$). Пусть $\mathfrak{Q}_2$ есть какая-нибудь подгруппа группы $\mathfrak{Q}$ (подгруппы Силова порядка q^β группы $\mathfrak{G}$), не содержащаяся целиком внутри $\mathfrak{Q}_1$. Очевидно, $\mathfrak{N}\mathfrak{Q}_2$ должно быть инвариантно в $\mathfrak{G}$ ($\mathfrak{N}\mathfrak{Q}_2$ есть группа, поскольку $\mathfrak{Q}_2$ инвариантна в $\mathfrak{G}$); это не противоречит следствию из леммы § 1 лишь в случае $\mathfrak{N}\mathfrak{Q}_2=\mathfrak{G}$, т. е. $\mathfrak{Q}_1\mathfrak{Q}_2=\mathfrak{Q}$. Следовательно, $\mathfrak{Q}_1$ есть максимальная подгруппа группы $\mathfrak{Q}$, т. е. $\delta=\beta-1$.

Подгруппа $\mathfrak{Q}_1$ не может иметь собственных подгрупп. Действительно, пусть $\mathfrak{Q}_3$ является такой подгруппой (очевидно, инвариантной в $\mathfrak{G}$, как и все подгруппы группы $\mathfrak{Q}_1$). Тогда $\mathfrak{P}\mathfrak{Q}_3$ есть инвариантная подгруппа группы $\mathfrak{G}$, а так как $\mathfrak{Q}_1$ тоже инвариантна, то мы получаем, что нормализатор

$$\mathfrak{N}=\mathfrak{P}\mathfrak{Q}_1=\mathfrak{P}\mathfrak{Q}_3\mathfrak{Q}_1$$

является инвариантной подгруппой группы $\mathfrak{G}$, чего, как уже было сказано, быть не может. Мы получили, следовательно, что $\beta-1=1$, т. е. $\beta=2$.

Пусть Q есть элемент порядка q группы $\mathfrak{G}$, не входящий в $\mathfrak{N}$. Группа $\mathfrak{P}\cdot\{Q\}$ является, очевидно, группой с одним классом неинвариантных подгрупп. На основании результатов работы [1]) мы получаем, что $\mathfrak{P}$ является циклической группой:

$$\mathfrak{P}=\{P\}, \quad P^{p^\alpha}=1.$$

Подгруппа $\mathfrak{Q}_1$ перестановочна с $\{P\}$. Следовательно, она перестановочна и с элементом P, так как в противном случае должно было бы выполняться условие

$$p\equiv 1 \pmod q,$$

в то время как по второй теореме Силова мы имеем

$$q\equiv 1 \pmod p.$$

Следовательно, группа $\mathfrak{G}$ является прямым произведением:

$$\mathfrak{G}=\{P, Q\}\cdot\mathfrak{Q}_1,$$

где $\{P, Q\}$ означает группу, порожденную элементами P и Q. Определяющие равенства группы $\mathfrak{G}$ запишутся следующим образом:

$$\text{II} \qquad \begin{cases} P^{p^\alpha} = 1, \quad Q^q = 1, \quad Q_1^q = 1, \\ PQP^{-1} = Q^l, \quad l^p \equiv 1 \pmod q, \\ PQ_1 = Q_1 P, \quad QQ_1 = Q_1 Q. \end{cases}$$

Порядок группы равен $p^\alpha q^2$.

§ 4. Мы предположили при выводе типа II группы $\mathfrak{G}$, что в $\mathfrak{G}$ имеется элемент Q порядка q, не входящий в $\mathfrak{N}$. Предположим теперь, что такого элемента не существует. Тогда в $\mathfrak{G}$ должен иметься элемент Q порядка q^2, не входящий в $\mathfrak{N}$, причем Q^q входит в $\mathfrak{N}$.

Все подгруппы группы $\mathfrak{P}$ должны быть инвариантными в группе $\mathfrak{G}$. Отсюда вытекает, что группа $\mathfrak{P}$ — циклическая, так как в противном случае ее можно было бы записать в виде произведения двух ее подгрупп и, следовательно, она была бы инвариантной в $\mathfrak{G}$..

Итак, $\mathfrak{P} = \{P\}$, причем $\{P^p\}$ есть инвариантная подгруппа группы $\mathfrak{G}$. Следовательно, $\{P^p\} \cdot \mathfrak{Q}$ есть специальная группа, т. е. P^p перестановочно с Q.

Очевидно (поскольку $\{Q\}$ является инвариантной подгруппой группы $\mathfrak{G}$),

$$PQP^{-1} = Q^l, \quad l^p \equiv 1 \pmod{q^2},$$

откуда

$$PQ^qP^{-1} = Q^{lq}.$$

С другой стороны, Q^q должно быть перестановочно с $\{P\}$:

$$PQ^q = Q^q P^{x+1}$$

или

$$PQ^qP^{-1} = Q^qP^x.$$

Очевидно, $x = 0$ и

$$lq \equiv q \pmod{q^2}.$$

Мы получаем, что

$$l = 1 + sq,$$

$$l^p \equiv 1 + psq \pmod{q^2}.$$

Но, как мы видели выше,

$$l^p \equiv 1 \pmod{q^2}.$$

Следовательно, $s = 0$ и $l = 1$, т. е. Q перестановочно с P, чего быть не может, так как тогда группа $\mathfrak{G}$ была бы специальной. Мы получили, что групп $\mathfrak{G}$ рассматриваемого типа не существует (если предположить, что $\mathfrak{N} \neq \mathfrak{P}$).

§ 5. Переходим к случаю $\mathfrak{N} = \mathfrak{P}$ (подгруппа $\mathfrak{P}$ совпадает со своим нормализатором). В этом случае, согласно лемме § 1, всякая подгруппа, содержащая $\mathfrak{P}$, не является инвариантной в $\mathfrak{G}$. Следовательно, все такие подгруппы (если они существуют) входят в один класс.

Предположим сначала, что подгруппа, содержащая $\mathfrak{P}$, существует. В этом случае, как уже сказано, она входит во второй класс неинва-

риантных подгрупп. Следовательно, подгруппа Силова $\mathfrak{Q}$ (порядка, равного степени простого числа q) группы $\mathfrak{G}$ и все подгруппы этой подгруппы Силова инвариантны в $\mathfrak{G}$. Из этого следует, что $\mathfrak{Q}$ не может иметь более одной собственной подгруппы, так как если $\mathfrak{Q}_1$ есть такая подгруппа, то $\mathfrak{P}\mathfrak{Q}_1$ — неинвариантная подгруппа группы $\mathfrak{G}$. Следовательно,

$$\mathfrak{Q} = \{Q\}, \quad Q^{q^2} = 1.$$

Что касается подгруппы Силова $\mathfrak{P}$, то по тем же основаниям, что и выше,

$$\mathfrak{P} = \{P\}, \quad P^{p^\alpha} = 1.$$

Мы получаем, таким образом, следующие определяющие равенства группы $\mathfrak{G}$:

III
$$\begin{cases} P^{p^\alpha} = 1, \quad Q^{q^2} = 1, \\ PQP^{-1} = Q^l, \quad l^p \equiv 1 \pmod{q^2}. \end{cases}$$

Выясним еще некоторые свойства чисел, входящих в эти формулы. В рассматриваемом случае Q^q не перестановочно с $\mathfrak{P}$ (поскольку $\mathfrak{N} = \mathfrak{P}$). Следовательно, в группе $\mathfrak{P} \cdot \{Q^q\}$ будет q подгрупп Силова порядка p^α, откуда

$$q \equiv 1 \pmod{p}.$$

Далее,

$$PQ^qP^{-1} = Q^{lq},$$

причем, поскольку Q^q не перестановочно с $\mathfrak{P}$,

$$lq \not\equiv q \pmod{q^2}.$$

Следовательно,

$$l \equiv \rho^{\frac{q(q-1)}{p}a} \pmod{q^2},$$

где ρ — первообразный корень по модулю q^2 и a не делится на p. От числа a можно избавиться, если ввести вместо P элемент $P_1 = P^x$, где x удовлетворяет сравнению

$$ax \equiv 1 \pmod{p}.$$

Тогда

$$P^xQP^{-x} = Q^{l^x}, \quad l^x \equiv \rho^{\frac{q(q-1)}{p}} \pmod{q^2}.$$

§ 6. Пусть теперь $\mathfrak{P} = \mathfrak{N}$, причем не существует подгруппы, содержащей $\mathfrak{P}$. Тогда $\mathfrak{Q}$ не должна иметь подгрупп, инвариантных в $\mathfrak{G}$, так как если бы имелась такая подгруппа $\mathfrak{Q}_1$, то $\mathfrak{P}\mathfrak{Q}_1$ было бы собственной подгруппой группы $\mathfrak{G}$, содержащей $\mathfrak{P}$.

Предположим сначала, что $\mathfrak{Q}$ неинвариантна в $\mathfrak{G}$, т. е. входит во второй класс неинвариантных подгрупп. Тогда $\mathfrak{Q}$ не имеет собственных подгрупп, т. е.

$$\mathfrak{Q} = \{Q\}, \quad Q^q = 1.$$

Подгруппа $\mathfrak{P}$ попрежнему должна быть циклической группой:

$$\mathfrak{P} = \{P\}, \quad P^{p^\alpha} = 1.$$

Подгруппа $\{P^p\}$ инвариантна в $\mathfrak{G}$; следовательно, Q перестановочно с $\{P^p\}$. Значит, Q или перестановочно с P, или производит внешний автоморфизм группы $\{P^p\}$. Если бы Q производило внешний автоморфизм группы $\{P^p\}$, то число q было бы делителем числа $p^{\alpha-1}(p-1)$, что невозможно, так как по второй теореме Силова $q \equiv 1 \pmod{p}$. Следовательно, Q должно быть перестановочно с P^p. Но тогда $\{P^p\} \cdot \{Q\}$ есть инвариантная подгруппа группы $\mathfrak{G}$. Отсюда следует, что

$$P^{-1}QP = P^{pu}Q^v$$

и

$$P^{-1}Q^qP = P^{puq}Q^{vq}.$$

Но, с другой стороны,

$$P^{-1}Q^qP = Q^q.$$

Следовательно, $u = 0$, т. е. $\mathfrak{Q} = \{Q\}$ есть, вопреки предположению, инвариантная подгруппа группы $\mathfrak{G}$.

§ 7. Осталось разобрать случай, когда $\mathfrak{N} = \mathfrak{P}$ и $\mathfrak{Q}$ есть инвариантная подгруппа группы $\mathfrak{G}$, не имеющая подгрупп, инвариантных в $\mathfrak{G}$. Тогда $\mathfrak{Q}$, очевидно, не имеет характеристических подгрупп, т. е. является элементарной группой. Разберем отдельно случаи $\beta > 1$ и $\beta = 1$ (q^β есть, как и прежде, порядок группы $\mathfrak{Q}$).

Пусть $\beta > 1$. Тогда подгруппы порядка q группы $\mathfrak{G}$ неинвариантны и, следовательно, все сопряжены между собой, образуя второй класс неинвариантных подгрупп. $\mathfrak{P}$ попрежнему должна быть циклической группой:

$$\mathfrak{P} = \{P\}, \quad P^{p^\alpha} = 1.$$

Если $\alpha > 1$, то $\{P^p\}$ есть собственная инвариантная подгруппа группы $\mathfrak{G}$; $\{P^p\} \cdot \{Q\}$, где Q есть любой (отличный от 1) элемент группы $\mathfrak{Q}$, также инвариантна в $\mathfrak{G}$. Элемент P должен преобразовывать $\{Q\}$ в некоторую другую подгруппу группы $\mathfrak{Q}$ и в то же время оставлять внутри $\{P^p\} \cdot \{Q\}$, что невозможно. Следовательно, $\alpha = 1$.

Все собственные подгруппы группы $\mathfrak{Q}$ неинвариантны в $\mathfrak{G}$; следовательно, все они входят в один класс сопряженных подгрупп. Но в таком случае все они должны быть одного порядка, равного q, и порядок $\mathfrak{Q}$ равен q^2, т. е. $\beta = 2$.

Все подгруппы порядка q группы $\mathfrak{Q}$ образуют, как уже сказано, один класс и переходят друг в друга при преобразовании элементом P. Следовательно, число этих подгрупп равно p. В элементарной группе порядка q^2 число подгрупп порядка q равно

$$\frac{q^2-1}{q-1} = q+1.$$

Следовательно,

$$p = q+1,$$

т. е.

$$p = 3, \quad q = 2.$$

Мы получили, что группа $\mathfrak{G}$ является группой тетраэдра:

$$\text{IV} \qquad \begin{cases} P^3 = 1, \quad Q_1^2 = 1, \quad Q_2^2 = 1, \\ P^{-1}Q_1P = Q_2, \quad P^{-1}Q_2P = Q_1Q_2, \\ Q_1Q_2 = Q_2Q_1. \end{cases}$$

§ 8. Пусть теперь $\beta = 1$. Тогда порядок $\mathfrak{G}$ равен $p^\alpha q$. Подгруппа Силова $\mathfrak{Q} = \{Q\}$ порядка q попрежнему инвариантна в $\mathfrak{G}$. По крайней мере одна из подгрупп, входящих во второй класс неинвариантных подгрупп, должна заключаться в $\mathfrak{P}$; обозначим эту подгруппу через $\mathfrak{P}_1$. Группа $\mathfrak{P}_1\mathfrak{Q}$, очевидно, инвариантна в $\mathfrak{G}$. Следовательно, пересечение $\mathfrak{P}$ и $\mathfrak{P}_1\mathfrak{Q}$, т. е. $\mathfrak{P}_1$, должно быть инвариантно в $\mathfrak{P}$. Группа $\mathfrak{P}$ не имеет подгрупп, неинвариантных в $\mathfrak{G}$, кроме $\mathfrak{P}_1$ и сопряженных с $\mathfrak{P}_1$. Если $\mathfrak{P}_1$ — нециклическая группа, то все циклические подгруппы $\mathfrak{P}$ инвариантны в $\mathfrak{G}$, а следовательно, и $\mathfrak{P}$ инвариантна в $\mathfrak{G}$. Поэтому мы должны считать $\mathfrak{P}_1$ циклической группой:

$$\mathfrak{P}_1 = \{P_1\}.$$

Докажем, что $\mathfrak{P}_1$ является максимальной подгруппой группы $\mathfrak{P}$. Если бы $\mathfrak{P}$ имела собственную подгруппу $\mathfrak{P}_2$, содержащую $\mathfrak{P}_1$, то $\mathfrak{P}_2$ была бы инвариантна в $\mathfrak{G}$. Следовательно, $\mathfrak{P}_2$ содержала бы и все подгруппы, сопряженные с $\mathfrak{P}_1$, чего не может быть, так как эти подгруппы содержатся в $\mathfrak{P}_1\mathfrak{Q}$. Мы получаем, таким образом, что порядок $\mathfrak{P}_1$ равен $p^{\alpha-1}$, т. е. $\mathfrak{P}$ имеет циклическую подгруппу порядка $p^{\alpha-1}$.

Предположим, что $\mathfrak{P}$ — нециклическая группа. Пусть P есть элемент $\mathfrak{P}$, не входящий в $\mathfrak{P}_1$. Группа $\{P\}$, как не входящая в $\mathfrak{P}_1\mathfrak{Q}$, не может быть сопряжена с $\mathfrak{P}_1$, а потому является инвариантной в $\mathfrak{G}$. Группа $\{P\}\cdot\mathfrak{Q}$ является прямым произведением своих подгрупп Силова; следовательно, P перестановочно с Q. Значит, Q преобразует PP_1 в PP_1', где P_1' входит в $\mathfrak{P}_1\mathfrak{Q}$, но не в $\mathfrak{P}_1$. Следовательно, $\{PP_1\}$ неинвариантна в $\mathfrak{G}$, откуда следует, что $\{PP_1\}$ сопряжена с $\mathfrak{P}_1$ ($\{PP_1\}$ не может быть сопряжена с $\mathfrak{P}$, если $\mathfrak{P}$ — нециклическая группа). Но этого не может быть, так как выше доказано, что все подгруппы, сопряженные с $\mathfrak{P}_1$, входят в $\mathfrak{P}_1\mathfrak{Q}$, т. е. не входят в $\mathfrak{P}$. Итак, мы получили, что $\mathfrak{P}$ — циклическая группа:

$$\mathfrak{P} = \{P\}, \quad P^{p^\alpha} = 1.$$

При этом $\{P^p\}$ неинвариантна в $\mathfrak{G}$, а $\{P^{p^2}\}$ инвариантна. Мы получаем для группы $\mathfrak{G}$ следующие определяющие равенства:

$$\text{V} \qquad \begin{cases} P^{p^\alpha} = 1, \quad Q^q = 1, \\ P^{-1}QP = Q^b, \quad b^{p^2} \equiv 1 \pmod q, \quad b^p \not\equiv 1 \pmod q. \end{cases}$$

Эти равенства возможны, если p^2 есть делитель числа $q - 1$, т. е.

$$q = kp^2 + 1;$$

например,

$$p = 2, \quad q = 4k + 1 \quad (q = 5, 13, \ldots),$$
$$p = 3, \quad q = 9k + 1 \quad (q = 19, 37, \ldots).$$

§ 9. Нами получены все возможные типы неспециальных групп с двумя классами неинвариантных подгрупп. Переходим теперь к случаю, когда $\mathfrak{G}$ является специальной группой.

Пусть группа $\mathfrak{G}$ специальна, т. е. является прямым произведением своих подгрупп Силова:

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{P}_{p^\alpha} \cdot \mathfrak{Q}_{q^\beta} \dots \mathfrak{R}_{r^\gamma}$$

(индексы внизу указывают порядок соответствующей подгруппы Силова). Хотя бы в одной из этих подгрупп Силова должна иметься подгруппа, неинвариантная в $\mathfrak{G}$; пусть это будет подгруппа $\mathfrak{P}_1$, содержащаяся в $\mathfrak{P}$. Тогда $\mathfrak{P}_1 \cdot \mathfrak{Q}$ тоже является неинвариантной подгруппой и притом входящей в другой класс. Следовательно, группа $\mathfrak{G}$ не может иметь более двух подгрупп Силова, т. е. ее порядок не может делиться больше чем на два различных простых числа.

Пусть порядок $\mathfrak{G}$ равен $p^\alpha q^\beta$. Тогда подгруппа Силова $\mathfrak{P}$ порядка p^α содержит неинвариантную в $\mathfrak{G}$ подгруппу $\mathfrak{P}_1$, а подгруппа Силова $\mathfrak{Q}$ порядка q^β не имеет подгрупп, неинвариантных в $\mathfrak{G}$. Пусть Q есть некоторый (отличный от единицы) элемент группы $\mathfrak{Q}$. Тогда $\mathfrak{P}_1 \cdot \{Q\}$ не может быть инвариантна в $\mathfrak{G}$, так как подгруппы, сопряженные с $\mathfrak{P}_1$, заключены в $\mathfrak{P}$, а пересечение $\mathfrak{P}$ и $\mathfrak{P}_1 \cdot \{Q\}$ равно $\mathfrak{P}_1$. Следовательно, $\mathfrak{P}_1 \cdot \{Q\}$ должно иметь тот же порядок, что и $\mathfrak{P}_1\mathfrak{Q}$, что возможно только в случае, если $\mathfrak{Q} = \{Q\}$. Так как это равенство должно выполняться для любого Q, то $\mathfrak{Q}$ должно иметь порядок q, т. е. $\beta = 1$.

Что касается подгруппы Силова $\mathfrak{P}$, то это — группа с одним классом неинвариантных подгрупп. Действительно, если бы число классов неинвариантных подгрупп в $\mathfrak{P}$ не было равно 1, то в $\mathfrak{P}$ имелись бы подгруппы, сопряженные между собой посредством элемента Q. Но это невозможно, так как из равенства

$$P^{-1}QP = Q^\alpha$$

($\{Q\}$ инвариантна в $\mathfrak{G}$) следует, что

$$QPQ^{-1} = PQ^{\alpha-1}.$$

Элемент $PQ^{\alpha-1}$ содержится в $\mathfrak{P}$ только в случае $\alpha = 1$, но тогда P и Q перестановочны.

Используя результаты работы [1]), мы можем записать определяющие равенства группы $\mathfrak{P}$ в следующем виде:

$$P^p = 1, \quad P_1^{p^n} = 1,$$

$$P_1 P = PP_1^{1+p^{n-1}}.$$

Следовательно, определяющие равенства группы $\mathfrak{G}$ будут такие:

VI
$$\begin{cases} P^p = 1, & P_1^{p^n} = 1, & Q^q = 1, \\ P_1 P = PP_1^{1+p^{n-1}}, & PQ = QP, & P_1 Q = QP_1. \end{cases}$$

Порядок $\mathfrak{G}$ равен $p^{n+1}q$.

§ 10. Осталось рассмотреть случай, когда $\mathfrak{G}$ является p-группой: $\mathfrak{G} = \mathfrak{P}_{p^\alpha}$. Ясно, что не все циклические подгруппы инвариантны, так как

в противном случае все подгруппы были бы инвариантны. Пусть $\{P\}$, порядка p^m, есть неинвариантная циклическая подгруппа и при этом не меньшая, если таких несколько. Относительно неинвариантной подгруппы, входящей в другой класс, можно делать различные предположения. Разберем сначала случай, когда она содержится в $\{P\}$, т. е. когда этой подгруппой является $\{P^p\}$. Подгруппа $\{P\}$ должна содержаться инвариантно в некоторой подгруппе $\overline{\mathfrak{P}}$ порядка p^{m+1}, которая сама является, очевидно, инвариантной подгруппой группы $\mathfrak{G}$. Следовательно, число подгрупп, сопряженных с $\{P\}$, равно p, так как группа порядка p^{m+1}, содержащая циклическую подгруппу порядка p^m, имеет или одну или p подгрупп порядка p^m [3]).

Все подгруппы, сопряженные с $\{P\}$ или $\{P^p\}$, содержатся в $\overline{\mathfrak{P}}$ и инвариантны в этой подгруппе. Следовательно, все подгруппы группы $\overline{\mathfrak{P}}$ инвариантны, т. е. она является абелевой или гамильтоновой группой [4]). Если $\overline{\mathfrak{P}}$ — гамильтонова группа, то она является группой кватернионов, так как из всех гамильтоновых групп только группа кватернионов является группой порядка p^{m+1}, имеющей циклическую подгруппу порядка p^m. Но если $\overline{\mathfrak{P}}$ — группа кватернионов (т. е. $p=2$, $m=2$), то $\{P^p\}=\{P^2\}$ есть характеристическая подгруппа группы $\overline{\mathfrak{P}}$, т. е. инвариантная подгруппа группы $\mathfrak{G}$. Следовательно, $\overline{\mathfrak{P}}$ должна быть абелевой группой.

Так как $\{P\}$ не инвариантна в $\mathfrak{G}$, то должен иметься элемент R, не перестановочный с $\{P\}$. Так как подгрупп, сопряженных с $\{P\}$, всего p, то R^p должно быть перестановочно с $\{P\}$. Группа $\{R\}$, очевидно, инвариантна в $\mathfrak{G}$ (поскольку не содержится в $\overline{\mathfrak{P}}$). Следовательно,

$$P^{-1}RP=RQ,$$

где Q есть степень R. Из этого равенства следует, что

$$RPR^{-1}=PQ.$$

Но тогда мы получаем, что Q содержится в $\overline{\mathfrak{P}}$, т. е. перестановочно с P (поскольку $\overline{\mathfrak{P}}$ — абелева).

Очевидно,

$$RP^pR^{-1}=P^pQ^p,$$

$$R^pPR^{-p}=PQ^p.$$

Из второго из этих равенств следует (поскольку $\{P\}$ перестановочна с R^p), что Q^p есть степень P, и притом делящаяся на p, так как в противном случае Q имело бы порядок p^{m+1} и $\overline{\mathfrak{P}}$ была бы циклической группой, из чего следовало бы, что $\{P\}$ есть характеристическая под-

---

[3]) См. W. Burnside, Theory of groups of finite order, 2-е изд., § 109.

[4]) Если второй класс неинвариантных подгрупп группы $\mathfrak{G}$ содержится в $\overline{\mathfrak{P}}$, то легко доказать (как это сделано выше для первого класса), что порядок этого класса равен p. Следовательно, этот класс может распасться в $\mathfrak{P}$ только на классы порядка 1.

группа группы $\overline{\mathfrak{P}}$ и инвариантная подгруппа группы $\mathfrak{G}$. Итак, $Q^p = P^{np}$. Но тогда

$$RP^pR^{-1} = P^pQ^p = P^{(1+n)p},$$

и мы получаем, что $\{P^p\}$ перестановочна с R. Так как R есть любой элемент группы $\mathfrak{G}$, не перестановочный с $\{P\}$, то мы получаем, что, вопреки нашим предположениям, $\{P^p\}$ инвариантна в $\mathfrak{G}$. Следовательно, группа $\mathfrak{G}$ не может быть рассматриваемого типа.

§ 11. Переходим к рассмотрению случая, когда имеется неинвариантная подгруппа $\{P\}$ порядка p^m, причем в этой подгруппе уже не имеется подгрупп, неинвариантных в $\mathfrak{G}$. Пусть попрежнему $\overline{\mathfrak{P}}$ есть подгруппа порядка p^{m+1}, заключающая в себе $\{P\}$. Эта подгруппа $\overline{\mathfrak{P}}$ либо инвариантна, либо неинвариантна в $\mathfrak{G}$. Разберем сначала случай, когда $\overline{\mathfrak{P}}$ инвариантна в $\mathfrak{G}$; $\overline{\mathfrak{P}}$ либо содержит, либо не содержит подгруппы, входящие во второй класс неинвариантных подгрупп. Предположим сперва, что $\overline{\mathfrak{P}}$ не содержит их. Тогда $\overline{\mathfrak{P}}$ имеет только инвариантные подгруппы, т. е. является абелевой или гамильтоновой группой. Пусть $\overline{\mathfrak{P}}$ — гамильтонова группа. Тогда (см. выше) $p=2$, $m=2$ и $\overline{\mathfrak{P}}$ есть группа кватернионов. Мы можем записать определяющие равенства группы $\overline{\mathfrak{P}}$ в следующем виде:

$$P^4 = 1, \quad B^4 = 1,$$

$$PB = BP^3.$$

Пусть T есть элемент группы $\mathfrak{G}$, не перестановочный с $\{P\}$. Очевидно, T преобразует $\{P\}$ в некоторую другую циклическую подгруппу порядка 4 группы $\overline{\mathfrak{P}}$; мы можем предположить, что этой подгруппой является $\{B\}$, поскольку выбор обозначений зависит от нас. В группе $\overline{\mathfrak{P}}$ имеются всего три циклические подгруппы порядка 4, а именно $\{P\}$, $\{B\}$, $\{PB\}$. Так как порядок элемента T равен степени числа 2, то при преобразовании посредством T группа $\{PB\}$ должна переходить сама в себя, так как в противном случае группа $\{P\}$ была бы перестановочна с T. Итак,

$$T^{-1}PT = B,$$
$$T^{-1}BT = P,$$
$$T^{-1}PBT = BP$$

или

$$T^{-1}PT = B,$$
$$T^{-1}BT = P^3,$$
$$T^{-1}PBT = BP^3.$$

Второй случай приводится к первому, если вместо T взять TB. Поэтому достаточно разобрать первый случай.

Обозначим нормализатор подгруппы $\{P\}$ относительно группы $\mathfrak{G}$ через $\overline{\overline{\mathfrak{P}}}$. Это есть подгруппа индекса 2 группы $\mathfrak{G}$ (поскольку $\{P\}$ сопряжена только с $\{B\}$). В группе $\overline{\overline{\mathfrak{P}}}$ подгруппа $\{P\}$ инвариантна; точно

так же и подгруппа $\{B\}$ инвариантна в $\overline{\overline{\mathfrak{P}}}$, так как

$$T^{-1}\overline{\overline{\mathfrak{P}}}T = \overline{\overline{\mathfrak{P}}}.$$

Следовательно, $\overline{\overline{\mathfrak{P}}}$ имеет самое большее один класс неинвариантных подгрупп. Но (см. работу [1])) группа с одним классом неинвариантных подгрупп не может иметь в качестве подгруппы группу кватернионов. Следовательно, все подгруппы $\overline{\overline{\mathfrak{P}}}$ инвариантны в $\overline{\overline{\mathfrak{P}}}$, т. е. $\overline{\overline{\mathfrak{P}}}$ — гамильтонова группа. Элемент T, очевидно, будет порядка не выше 2^3, так как T^2 содержится в $\overline{\overline{\mathfrak{P}}}$, а гамильтонова группа порядка 2^k не содержит элементов порядка большего чем 2^2. На основании теории гамильтоновых групп мы можем написать

$$\overline{\overline{\mathfrak{P}}} = \overline{\mathfrak{P}} \cdot \{D_1\} \cdot \{D_2\} \ \ldots \ \{D_\mu\},$$

где все D_i — порядка 2.

Если $\{D_1\}$ неинвариантна в $\mathfrak{G}$, то T преобразует $\{D_1\}$ в одну из других $\{D_i\}$, например, в $\{D_2\}$. $\{PD_1\}$ должна быть инвариантна в $\mathfrak{G}$, поскольку в один класс неинвариантных подгрупп входит $\{P\}$, а в другой — $\{D_1\}$. Но это невозможно, так как

$$T^{-1}\{PD_1\}T = \{BD_2\}.$$

Следовательно, $\{D_1\}$ должна быть инвариантна в $\mathfrak{G}$. Тогда

$$TD_1 = D_1T,$$
$$T^{-1}(PD_1)T = BD_1,$$

т. е. $\{PD_1\}$ принадлежит ко второму классу неинвариантных подгрупп. Точно так же все $\{PD_i\}$ неинвариантны в $\mathfrak{G}$. $\{PD_i\}$ и $\{PD_k\}$ не могут быть сопряжены, если $i \neq k$, так как $\{PD_i\}$ от преобразования посредством элемента группы $\mathfrak{G}$ может перейти только в $\{BD_i\}$. Следовательно, $k = 0$ или $k = 1$.

Пусть $k = 1$. Тогда $\{T\}$ инвариантна в $\mathfrak{G}$ (поскольку $\{T\}$ не может быть сопряжена ни с $\{P\}$, ни с $\{PD_1\}$). Следовательно, в результате преобразования посредством элемента P элемент T переходит в некоторую свою степень. Но из равенства

$$T^{-1}PT = B$$

следует, что

$$PTP^{-1} = TBP^3,$$

т. е. BP^3 есть степень T:

$$BP^3 = PB = T^x.$$

Но

$$T^{-1}PBT = BP,$$

т. е. T не перестановочно с PB. Таким образом, положив $k = 1$, мы получили противоречие. Следовательно, надо взять $k = 0$. В этом случае $\mathfrak{G}$ имеет порядок $2^4 = 16$. Подгруппа $\{T\}$, как только что доказано, не может быть инвариантной в $\mathfrak{G}$. Следовательно, она входит во второй класс неинвариантных подгрупп. Так как T не перестановочно ни с P,

ни с B, ни с PB, то T^2 должно быть равно или 1, или элементу $C = P^2 = B^2$ (напоминаем, что T^2 должно содержаться в $\overline{\mathfrak{P}}$). Если $T^2 = 1$, то подгруппа, порожденная элементами T и C, очевидно, неинвариантна и не сопряжена с $\{T\}$, так что мы получаем третий класс неинвариантных подгрупп. Итак, $T^2 = C$. Группа $\mathfrak{G}$ имеет следующие определяющие равенства:

$$\text{VII} \qquad \begin{cases} P^4 = 1, \quad B^4 = 1, \quad T^4 = 1, \\ P^2 = B^2 = T^2, \\ PB = BP^3, \quad PT = TB, \quad BT = TP. \end{cases}$$

Порядок группы $\mathfrak{G}$ равен 16. Первый класс неинвариантных подгрупп состоит из подгрупп

$$\{P\}_4, \quad \{B\}_4,$$

а второй — из подгрупп

$$\{T\}_4, \quad \{TPB\}_4.$$

Кроме того, имеются инвариантные подгруппы

$$\{PB\}_4, \quad \{P^2\}_2, \quad \{P, B\}_8, \quad \{T, PB\}_8, \quad \{TP\}_8$$

(значки внизу указывают порядки соответствующих подгрупп). Подгруппы $\{P, B\}_8$ и $\{T, PB\}_8$ являются группами кватернионов. Подгруппа $\{TP\}_8$ состоит из элементов

$$\begin{aligned} &TP, \\ &(TP)^2 = TPTP = T^2BP = B^3P = PB, \\ &(TP)^3 = TPPB = TB^3, \\ &(TP)^4 = PBPB = PBBP^3 = PP^2P^3 = P^2 = C, \\ &(TP)^5 = TPC = TP^3, \\ &(TP)^6 = TPTP^3 = BTTP^3 = BP^5 = BP, \\ &(TP)^7 = TPBP = TBP^3P = TB, \\ &(TP)^8 = TBTP = TTPP = T^2P^2 = P^4 = 1. \end{aligned}$$

Таким образом в $\mathfrak{G}$ содержится элемент восьмого порядка.

§ 12. Рассмотрим теперь случай, когда подгруппа $\overline{\mathfrak{P}}$ порядка p^{m+1}, содержащая неинвариантную в $\mathfrak{G}$ подгруппу $\{P\}$ порядка p^m, попрежнему инвариантна в $\mathfrak{G}$, но уже не гамильтонова, а абелева. Так как $\overline{\mathfrak{P}}$ — нециклическая группа порядка p^{m+1}, содержащая циклическую подгруппу порядка p^m (если $\overline{\mathfrak{P}}$ — циклическая группа, то $\{P\}$ инвариантна в $\mathfrak{G}$; см. выше), то в $\overline{\mathfrak{P}}$ имеется только p циклических подгрупп порядка p^m, так что число подгрупп, сопряженных с $\{P\}$, равно p. Индекс нормализатора $\overline{\mathfrak{P}}$ подгруппы $\{P\}$ равен, следовательно, p. $\overline{\mathfrak{P}}$ содержит не более одного класса неинвариантных подгрупп (поскольку $\overline{\mathfrak{P}}$ является нормализатором и для всех подгрупп, сопряженных с $\{P\}$)[4]). Но $\overline{\mathfrak{P}}$ не может быть группой с одним классом неинвариантных подгрупп (см. работу [1])), поскольку содержит абелеву нециклическую подгруппу $\overline{\mathfrak{P}}$, причем P не является p-й степенью другого элемента (если P есть степень другого элемента, то $\{P\}$ содержится в большей неинвариантной подгруппе). Следовательно, $\overline{\mathfrak{P}}$ — абелева или гамильтонова группа.

Пусть порядок группы $\mathfrak{G}$ равен, как и выше, p^α. Порядок $\overline{\overline{\mathfrak{P}}}$ равен тогда $p^{\alpha-1}$, так что в $\mathfrak{G}$ имеется $p^\alpha - p^{\alpha-1}$ элементов, не перестановочных с $\{P\}$. Пусть p^λ есть порядок подгрупп, входящих во второй класс неинвариантных подгрупп. Число этих подгрупп не может, очевидно, быть бо́льшим, чем $p^{\alpha-\lambda-1}$. Следовательно, в $\mathfrak{G}$ имеется не менее

$$p^\alpha - p^{\alpha-1} - p^{\alpha-\lambda-1}(p^\lambda - 1) = p^\alpha\left(1 - \frac{2}{p}\right) + p^{\alpha-\lambda-1} \geqslant p^{\alpha-\lambda-1}$$

элементов, не перестановочных с $\{P\}$ и не входящих ни в одну из подгрупп второго класса неинвариантных подгрупп. Пусть P_1 есть такой элемент. Очевидно, $\{P_1\}$ инвариантна в $\mathfrak{G}$. Следовательно,

$$P^{-1}P_1P = P_1^{1+a},$$
$$P_1PP_1^{-1} = PP_1^a,$$

откуда следует, что P_1^a содержится в $\overline{\overline{\mathfrak{P}}}$ ($\overline{\overline{\mathfrak{P}}}$ инвариантна в $\mathfrak{G}$). Далее, P_1^p содержится в $\overline{\overline{\mathfrak{P}}}$ (поскольку индекс $\overline{\overline{\mathfrak{P}}}$ относительно $\mathfrak{G}$ равен p). Очевидно, $\overline{\overline{\mathfrak{P}}} = \{P_1P_1^a\}$.

Докажем, что P_1^p перестановочно с P. Если группа $\overline{\overline{\mathfrak{P}}}$ — абелева, то это очевидно. Пусть теперь группа $\overline{\overline{\mathfrak{P}}}$ — гамильтонова. Тогда порядок $\overline{\overline{\mathfrak{P}}}$ не может превышать 2^3. Порядок элемента P равен либо 2 (тогда P входит в центр группы $\overline{\overline{\mathfrak{P}}}$ и, очевидно, перестановочен с P_1^p), либо 4. Порядок элемента $P_1^p = P_1^2$ не может быть больше 4, поскольку этот элемент содержится в гамильтоновой группе $\overline{\overline{\mathfrak{P}}}$. Следовательно, порядок P_1 не может быть больше 8. Число a в рассматриваемом случае, очевидно, делится на 2. Если оно не делится на 4, то элемент P_1^p есть степень элемента P_1^a и потому перестановочен с P (напоминаем, что группа $\overline{\overline{\mathfrak{P}}}$ — абелева). Если же a делится на 4, то из равенства

$$P^{-1}P_1P = P_1^{1+a}$$

получаем

$$P^{-1}P_1^pP = P^{-1}P_1^2P = P_1^{2(1+a)} = P_1^2.$$

Итак, мы доказали, что во всяком случае элементы P и P_1^p перестановочны.

Из равенств

$$P^{-1}P_1^pP = P_1^{p+ap},$$
$$P^{-1}P_1^pP = P_1^p$$

следует, что

$$P_1^{ap} = 1.$$

Если порядок элемента P_1 равен p^n, то, очевидно,

$$a = kp^{n-1},$$

где k не делится на p. Мы можем положить для простоты $k = 1$, т. е.

$$a = p^{n-1}.$$

Подгруппы

$$\{P\},\quad \{PP_1^a\},\quad \{PP_1^{2a}\},\quad \ldots,\quad \{PP_1^{(p-1)a}\}$$

сопряжены друг с другом, образуя один класс неинвариантных подгрупп. Рассмотрим теперь подгруппу $\{PP_1^{p^{n-2}}\}$ ($n \geqslant 2$, так как в противном случае P и P_1 перестановочны). Эта подгруппа либо входит во второй класс неинвариантных подгрупп, либо инвариантна. Пусть подгруппа $\{PP_1^{p^{n-2}}\}$ инвариантна в $\mathfrak{G}$. Тогда из равенства

$$P_1 (PP_1^{p^{n-2}}) = (PP_1^{p^{n-2}})\, P^{1+a}$$

следует, что

$$P_1^a = (PP_1^{p^{n-2}})^\nu = P^\nu P_1^{\nu p^{n-2}},$$

если $n > 2$, и

$$P_1^a = (PP_1)^\nu = P^\nu P_1^\nu P_1^{\frac{a\nu(\nu-1)}{2}}$$

если $n = 2$.

Никакая степень элемента P не может быть степенью элемента P_1, так как в противном случае P_1^a было бы степенью P и P_1 было бы перестановочно с $\{P\}$. Следовательно, $\nu = lp^m$.

Мы получаем, что

$$p^{n-1} \equiv lp^{m+n-2} \pmod{p^n},$$

если $n > 2$, и

$$p \equiv lp^m + \frac{lp^{m+1}(lp^m-1)}{2} \pmod{p^2},$$

если $n = 2$. И в том, и в другом случае мы получаем, что $m = 1$. Итак, если $\{PP_1^{p^{n-2}}\}$ инвариантна в $\mathfrak{G}$, то $P^p = 1$.

Пусть теперь $\{PP_1^{p^{n-2}}\}$ входит во второй класс неинвариантных подгрупп. Рассмотрим подгруппу $\{P^2P_1^{p^{n-2}}\}$. Если эта подгруппа также содержится во втором классе неинвариантных подгрупп, то $P^2P_1^{p^{n-2}}$ есть степень одного из производящих элементов $PP_1^{p^{n-2}+up^{n-1}}$; следовательно,

$$(PP_1^{p^{n-2}}P_1^{ua})^w = P^2P_1^{p^{n-2}}.$$

Отсюда следует, что

$$P^w P_1^{wp^{n-2}}\, P_1^{wua} = P^2P_1^{p^{n-2}},$$

если $n > 2$, и

$$P^w P_1^{wv} P_1^{puw + p\frac{w(w-1)}{2}} = P^2P_1,$$

если $n = 2$. В обоих случаях

$$w = 2 + lp^m,$$

так как никакая степень P не может быть равна степени P_1 (см. выше). Мы получаем, что

$$(2+lp^m)\, p^{n-2} + u\,(2+lp^m)\, p^{n-1} \equiv p^{n-2} \pmod{p^n},$$

если $n > 2$, и

$$2 + lp^m + pu(2 + lp^m) + p\frac{(2 + lp^m)(1 + lp^m)}{2} \equiv 1 \pmod{p^2},$$

если $n = 2$. В обоих случаях мы приходим к невозможному сравнению

$$2 \equiv 1 \pmod{p}.$$

Следовательно, подгруппа $\{PP_1^{p^{n-2}}\}$ должна быть инвариантной в $\mathfrak{G}$. А в таком случае, как мы видели,

$$P^p = 1.$$

Группа $\{P, P_1\}$ является группой с одним классом неинвариантных подгрупп. Исключение составляет случай $p = 2$, $n = 2$, разобранный ниже. Попытаемся построить группу с двумя классами неинвариантных подгрупп, заключающую в себе группу $\{P, P_1\}$. Подгруппы, входящие во второй (не содержащийся в $\{P, P_1\}$) класс неинвариантных подгрупп, очевидно, должны быть циклическими. Действительно, если такая подгруппа не является циклической, то ее можно представить в виде произведения нескольких циклических подгрупп. По крайней мере одна из этих циклических подгрупп не должна быть инвариантной в $\mathfrak{G}$. Но подгруппа, входящая во второй класс неинвариантных подгрупп, не должна заключать в себе $\{P\}$ или подгруппу, сопряженную с $\{P\}$, так как мы разбираем сейчас случай, когда подгруппа порядка p^2, заключающая в себе $\{P\}$, инвариантна в $\mathfrak{G}$. Следовательно, если мы предположим, что подгруппы, входящие во второй класс неинвариантных подгрупп, не циклические, то в $\mathfrak{G}$ будет по крайней мере три класса неинвариантных подгрупп. Итак, мы можем считать, что одна из подгрупп, входящих во второй класс неинвариантных подгрупп, порождается элементом P_2 (очевидно, не входящим в $\{P, P_1\}$). Относительно элемента P_2 мы можем повторить все рассуждения, которые были проведены выше применительно к элементу P. Подгруппа $\overline{\mathfrak{P}}_2$ порядка p^{m_2+1}, заключающая в себе подгруппу $\{P_2\}$ порядка p^{m_2}, очевидно, инвариантна в $\mathfrak{G}$, так как в противном случае в $\mathfrak{G}$ имелся бы третий класс неинвариантных подгрупп. Следовательно, мы можем доказать для элемента P_2 (подобно тому, как это было выше сделано для P), что его порядок равен p:

$$P_2^p = 1.$$

Если P_2 содержится в $\overline{\mathfrak{P}}$, то (так как порядок P равен p) P и P_2 перестановочны. Группа $\{P, P_2\}$ порядка p^2, очевидно, инвариантна в $\mathfrak{G}$, так что все подгруппы, сопряженные с $\{P\}$, содержатся в ней. Следовательно, в нашем случае $\{P, P_2\} = \overline{\mathfrak{P}}$. Но в таком случае P_2 содержится в $\{P, P_1\}$, так как можно положить $P_2 = P_1^a$. Значит, P_2 не может содержаться в $\overline{\mathfrak{P}}$. Аналогично, P не может содержаться в подгруппе $\overline{\mathfrak{P}}_2$ — нормализаторе подгруппы $\{P_2\}$.

Выше было доказано, что $\{P\}$ входит в класс, состоящий из подгрупп

$$\{P\}, \quad \{PP_1^a\}, \quad \{PP_1^{2a}\}, \quad \ldots, \quad \{PP_1^{(p-1)a}\}.$$

Рассмотрим теперь класс, в который входит $\{P_2\}$. Как мы выяснили, P_2 не содержится в $\overline{\overline{\mathfrak{P}}}$. Следовательно, P_2 содержится в какой-либо смежной системе вида $P_1^{\lambda}\overline{\overline{\mathfrak{P}}}$ ($\lambda = 1, 2, \ldots, p-1$). Не уменьшая общности, мы можем предположить, что P_2 содержится в системе $P_1\overline{\overline{\mathfrak{P}}}$. Тогда

$$P_2 = P_1\overline{\overline{P}}$$

($\overline{\overline{P}}$ — элемент подгруппы $\overline{\overline{\mathfrak{P}}}$) и

$$P^{-1}P_2P = P_2P_1^a$$

(подгруппа $\overline{\overline{\mathfrak{P}}}$, как указывалось выше, — абелева или гамильтонова, так что P входит в ее центр). Следовательно, $\{P_2\}$ входит в класс, состоящий из подгрупп

$$\{P_2\},\quad \{P_2P_1^a\},\quad \{P_2P_1^{2a}\},\quad \ldots,\quad \{P_2P_1^{(p-1)a}\}.$$

Элемент P_1^a, очевидно, содержится в $\overline{\overline{\mathfrak{P}}}_2$ и перестановочен с P_2 (рассуждаем по аналогии: выше доказано, что P_1^a содержится в $\overline{\overline{\mathfrak{P}}}$ и перестановочен с P).

Рассмотрим элемент PP_2. Он не содержится ни в одной из подгрупп, входящих в классы неинвариантных подгрупп. Следовательно, подгруппа $\{PP_2\}$ инвариантна в $\mathfrak{G}$. Из равенства

$$P^{-1}(PP_2)P = PP_2P_1^a$$

мы получаем, что P_1^a является степенью элемента PP_2. С другой стороны,

$$(PP_2)^p = P^pP_2^pP_1^{a\frac{p(p-1)}{2}}.$$

Если $p > 2$, то $p-1$ делится на 2 и

$$(PP_2)^p = 1.$$

Но тогда элементы P_1^a и PP_2 — одного порядка и PP_2 является степенью P_1^a. Отсюда следует, что P_2 содержится в $\{P, P_1\}$, что невозможно. Мы получили, что если $p > 2$, то $\{P, P_1\}$ не может входить в группу с двумя классами неинвариантных подгрупп.

Переходим к случаю $p = 2$. Пусть $n > 2$. Элемент $P_1^{2^{n-2}}$ перестановочен с элементами P и P_2. Следовательно,

$$(PP_2P_1^{2^{n-2}})^2 = (PP_2)^2P_1^a = P_1^{2a} = 1.$$

С другой стороны, элемент $PP_2P_1^{2^{n-2}}$ не содержится ни в одной из подгрупп, входящих в классы неинвариантных подгрупп. Следовательно, из равенства

$$P^{-1}(PP_2P_1^{2^{n-2}})P = (PP_2P_1^{2^{n-2}})P_1^a$$

вытекает, что элемент P_1^a есть степень элемента $PP_2P_1^{2^{n-2}}$. Но мы выяснили, что порядки этих элементов одинаковы. Следовательно, элемент $PP_2P_1^{2^{n-2}}$ есть степень элемента P_1^a, т. е. P_2 содержится в $\{P, P_1\}$. Мы опять получили противоречие.

Остался случай $p=2$, $n=2$. В этом случае группа $\{P, P_1\}$ сама является, как легко проверить, группой с двумя классами неинвариантных подгрупп. Мы получаем следующий тип группы $\mathfrak{G}$:

VIII
$$\begin{cases} P^2=1, \quad P_1^4=1, \\ P_1P=PP_1^3. \end{cases}$$

Порядок группы равен 8. Один класс неинвариантных подгрупп состоит из подгрупп $\{P\}$, $\{PP_1^2\}$, а другой — из подгрупп $\{PP_1\}$, $\{PP_1^3\}$.

Докажем, что нельзя построить группу, содержащую в себе группу VIII и имеющую два класса неинвариантных подгрупп (этими двумя классами должны были бы, очевидно, являться все те же классы $\{P\}$, $\{PP_1^2\}$ и $\{PP_1\}$, $\{PP_1^3\}$). Допустим, что такая группа существует и что R есть ее элемент, не входящий в $\{P, P_1\}$. Элемент R либо перестановочен с P, либо переводит этот элемент в элемент PP_1^2. Следовательно, из элементов R и RP_1 один перестановочен с P. Пусть это будет элемент R. Точно так же из элементов R и RP один должен быть перестановочен с P_1. Мы можем предположить, не уменьшая общности, что это R. Итак, элемент R перестановочен с P и P_1.

Возьмем элемент PR. Он не содержится ни в одной из подгрупп, входящих в классы неинвариантных подгрупп; следовательно, $\{PR\}$ есть инвариантная подгруппа. Из равенства

$$P_1(PR)P_1^{-1}=PRP_1^2$$

мы получаем, что элемент P_1^2 является степенью (очевидно, четной) элемента PR. Но

$$(PR)^2=R^2.$$

Следовательно, P_1^2 есть степень элемента R. Если порядок R равен 2^r то мы можем положить

$$P_1^2=R^{2^{r-1}}.$$

Рассмотрим элемент $P_1R^{2^{r-2}}$ (если $r<2$, то R содержится в $\{P, P_1\}$). Этот элемент не содержится ни в одной из подгрупп, входящих в классы неинвариантных подгрупп; следовательно, подгруппа $\{P_1R^{2^{r-2}}\}$ инвариантна в $\mathfrak{G}$. Из равенства

$$P^{-1}(P_1R^{2^{r-2}})P=P_1R^{2^{r-2}}P_1^2$$

получаем, что элемент P_1^2 является степенью элемента $P_1R^{2^{r-2}}$.

Но

$$(P_1R^{2^{r-2}})^2=P_1^2R^{2^{r-1}}=R^{2^r}=1.$$

Следовательно, порядки элементов P_1^2 и $P_1R^{2^{r-2}}$ равны, т. е. элемент $P_1R^{2^{r-2}}$ есть степень элемента P_1^2. Элемент P_1^2 инвариантен в $\mathfrak{G}$. Следовательно, и элемент $P_1R^{2^{r-2}}$ инвариантен в $\mathfrak{G}$, чего не может быть в силу равенства

$$P^{-1}(P_1R^{2^{r-2}})P=P_1R^{2^{r-2}}P_1^2.$$

Мы доказали, таким образом, что группа $\mathfrak{G}$ типа VIII не поддается расширению.

§ 13. Пусть попрежнему $\{P\}$ есть неинвариантная подгруппа порядка p^m группы $\mathfrak{G}$ и $\overline{\mathfrak{P}}$ — подгруппа порядка p^{m+1}, содержащая в себе подгруппу $\{P\}$. Нами уже разобран случай, когда подгруппа, входящая во второй класс неинвариантных подгрупп, содержится в $\{P\}$, и случай, когда эта подгруппа лежит вне $\overline{\mathfrak{P}}$. Остается исследовать случай, когда подгруппа, входящая во второй класс неинвариантных подгрупп, содержит в себе $\{P\}$, и когда она является циклической подгруппой, входящей в $\overline{\mathfrak{P}}$, но не в $\{P\}$. Второй из этих случаев не представляет, однако, ничего нового, так как мы можем в этом случае применить к подгруппе, о которой идет речь, все те рассуждения, которые имели место применительно к $\{P\}$. Итак, мы можем предполагать в дальнейшем, что $\{P\}$ содержится в одной из подгрупп, входящих во второй класс неинвариантных подгрупп. Эта последняя подгруппа не должна быть циклической, так как иначе мы будем иметь опять-таки уже исследованный случай.

Предположим, что подгруппа $\overline{\mathfrak{P}}$ инвариантна в $\mathfrak{G}$. Тогда, повторяя рассуждения, изложенные выше, получаем

$$P^p = 1.$$

Единственными коммутаторами элемента P будут попрежнему элементы $P_1^{ka} = P_1^{kp^{n-1}}$ $(k = 1, 2, \ldots, p-1)$. Одна из подгрупп, входящих во второй класс инвариантных подгрупп, должна содержать P; обозначим эту подгруппу через $\mathfrak{P}_2$; $\mathfrak{P}_2$, очевидно, не содержит элемента P_1^a, так как в противном случае мы могли бы представить $\mathfrak{P}_2$ в виде произведения инвариантных подгрупп, а именно подгруппы $\{P, P_1^a\}$ и циклических подгрупп, отличных от $\{P\}$, и подгрупп, сопряженных с $\{P\}$. Следовательно, $\mathfrak{P}_2$ была бы сама инвариантна в $\mathfrak{G}$.

Возьмем в подгруппе $\mathfrak{P}_2$ элемент P_2 порядка p, не содержащийся в $\{P, P_1\}$. Это возможно сделать, поскольку $\mathfrak{P}_2$ — нециклическая группа и не содержит P_1^a, так что пересечение $\mathfrak{P}_2$ и $\{P, P_1\}$ равно $\{P\}$. Подгруппа $\{P, P_2\}$ не может быть инвариантной, поскольку не содержит коммутаторов P_1^{ka}. Следовательно,

$$\mathfrak{P}_2 = \{P, P_2\},$$

причем порядок этой подгруппы равен p^2 (поскольку $\{P_2\}$ инвариантна в $\mathfrak{G}$).

Рассмотрим теперь циклическую подгруппу $\{PP_2\}$. Она не сопряжена с $\{P\}$, а потому должна быть инвариантной. Следовательно, P_1 перестановочно с P_2 (поскольку $P_2^p = 1$). Но тогда

$$P_1 (PP_2) P_1^{-1} = PP_2 P_1^a,$$

т. е. P_1^a входит в $\mathfrak{P}_2$. Мы пришли к противоречию. Таким образом доказано, что никакая подгруппа порядка p^{m+1}, содержащая $\{P\}$, не инвариантна в $\mathfrak{G}$.

Рассмотрим композиционный ряд группы $\mathfrak{G}$:

$$\mathfrak{G}, \ldots, \mathfrak{F}, \overline{\mathfrak{P}}, \{P\}, \ldots, 1.$$

По доказанному, $\overline{\mathfrak{P}}$ не инвариантна в $\mathfrak{G}$. Следовательно, $\mathfrak{F}$ инвариантна в $\mathfrak{G}$. При этом $\mathfrak{F} \neq \mathfrak{G}$, так как в противном случае $\overline{\mathfrak{P}}$ была бы инвариантна в $\mathfrak{G}$ (подгруппа порядка $p^{\alpha-1}$ инвариантна в группе порядка p^{α}). Все коммутаторы элемента P и все подгруппы, сопряженные с $\overline{\mathfrak{P}}$, очевидно, заключены в $\mathfrak{F}$.

Пусть U есть элемент, не входящий в $\mathfrak{F}$. Тогда подгруппы $\{U\}$ и $\{U, P\}$ инвариантны в $\mathfrak{G}$, поскольку не содержатся в $\mathfrak{F}$. Пересечение подгрупп $\mathfrak{F}$ и $\{U, P\}$, очевидно, также инвариантно в $\mathfrak{G}$. Следовательно, это пересечение (содержащее $\{P\}$) не сопряжено ни с $\{P\}$, ни с $\overline{\mathfrak{P}}$, т. е. является подгруппой $\mathfrak{F}$. Очевидно,

$$\mathfrak{F} = \{U^{p^{v-2}}, P\},$$

где p^v — показатель наименьшей степени U, являющейся степенью P. Порядок $\mathfrak{F}$ равен p^{m+2}.

Рассмотрим дополнительную группу $\mathfrak{G}/\{P^p\}$ (мы переходим к этой группе от группы $\mathfrak{G}$, положив $P^p = 1$). Порядок группы $\mathfrak{F}/\{P^p\}$ равен, очевидно, p^3. В этой последней группе подгруппа $\{U^{p^{v-1}}, P\}/\{P^p\}$ является характеристической подгруппой, поскольку содержит все элементы порядка p. Следовательно, $\{U^{p^{v-1}}, P\}/\{P^p\}$ инвариантна в $\mathfrak{G}/\{P^p\}$. Но тогда $\{U^{p^{v-1}}, P\}$ инвариантна в $\mathfrak{G}$, чего быть не может, так как эта подгруппа содержит $\{P\}$ и имеет порядок, равный p^{m+1}. Мы пришли к противоречию; группы $\mathfrak{G}$ исследуемого типа не существует.

Исследование закончено. Найдено восемь типов групп с двумя классами неинвариантных подгрупп. Других типов таких групп не существует.

SUR LA RECHERCHE QUALITATIVE ET QUANTITATIVE D'UN SYSTÈME D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES JOUANT UN RÔLE IMPORTANT DANS LA PHYSIQUE COSMIQUE.

Par Carl Störmer.

(Institute of Theoretical Astrophysics, Blindern, V. Aker, Norvège.)

1. Introduction. Dans la mécanique céleste classique on est amené à trouver le mouvement des grands corps célestes sous l'influence de la gravitation.

Cependant en ces dernières 40 années d'autres problèmes célestes se sont présentés: trouver le mouvement des particules électrisées sous l'action des forces magnétiques; par exemple, dans le cas des aurores boréales, on a le problème de trouver les trajectoires des corpuscules électriques venant du soleil vers la terre et se mouvant dans le champ magnétique de celle-ci. D'autre part, si le soleil est magnétique, on aura le problème de trouver les trajectoires de particules semblables se mouvant dans la couronne du soleil. Enfin, en ces dernières années, le problème des aurores boréales, mais avec d'autres constantes et d'autres conditions initiales, est redevenu actuel dans la théorie des rayons cosmiques; en effet, la plupart de ces rayons remarquables semblent être constitués par des électrons ou des positrons venant de toutes les directions de l'espace et ayant une énergie suffisante pour traverser toute l'atmosphère terrestre et même pénétrer profondément dans le sol.

Tous ces phénomènes conduisent à de nouveaux problèmes en dehors du domaine de la mécanique céleste classique.

2. Problème fondamental. Système d'équations différentielles à intégrer. Comme le champ magnétique d'un aimant se rapproche de plus en plus de celui d'un aimant élémentaire ou dipole à mesure que la distance jusqu'à l'aimant augmente, on est conduit au problème fondamental suivant:

Trouver la trajectoire d'un corpuscule électrique dans le champ d'un aimant élémentaire.

Dans une longue série de mémoires, depuis l'année 1904 [1]), j'ai traité ce problème et, tantôt par des considérations théoriques, tantôt par des calculs numériques, j'ai trouvé une série de propriétés de ces trajectoires, utiles dans l'application.

---

[1]) Pour un aperçu général voir: Carl Störmer, Über die Probleme des Polarlichtes, Ergebnisse der kosmischen Physik, Bd. 1, Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig 1931.

Avec des unités convenables et un système de coordonnées $OXYZ$ avec l'origine O dans l'aimant élémentaire et l'axe de Z le long de l'axe de celui-ci, les équations différentielles à étudier seront [2])

$$(1)\qquad \begin{cases} r^5 \dfrac{d^2x}{ds^2} = 3yz\dfrac{dz}{ds} - (3z^2 - r^2)\dfrac{dy}{ds}, \\ r^5 \dfrac{d^2y}{ds^2} = (3z^2 - r^2)\dfrac{dx}{ds} - 3xz\dfrac{dz}{ds}, \\ r^5 \dfrac{d^2z}{ds^2} = 3xz\dfrac{dy}{ds} - 3yz\dfrac{dx}{ds}, \end{cases}$$

où s est l'arc de la trajectoire et où $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$.

En introduisant des coordonnées semipolaires

$$x = R\cos\varphi, \quad y = R\sin\varphi$$

on trouve une combinaison intégrable qui fournit une intégrale première avec une constante d'intégration γ [3])

$$(2)\qquad R^2\frac{d\varphi}{ds} = 2\gamma + \frac{R^2}{r^3},$$

et, s étant l'arc de la trajectoire, on a aussi la seconde intégrale première

$$(3)\qquad \left(\frac{dR}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2 + \left(\frac{2\gamma}{R} + \frac{R}{r^3}\right)^2 = 1.$$

Alors R et z seront [4]) donnés par le système

$$(4)\qquad \begin{cases} \dfrac{d^2R}{ds^2} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial Q}{\partial R}, \\ \dfrac{d^2z}{ds^2} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial Q}{\partial z}, \end{cases}$$

où d'après (3)

$$\left(\frac{dR}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2 = Q,$$

Q étant la fonction $1 - (2\gamma R^{-1} + Rr^{-3})^2$.

Le système (4) est très important pour la discussion qualitative de trajectoires, comme je l'ai démontré dans une série de mémoires depuis 1906 [5]). Encore plus utile est la forme suivante, qu'on obtient en introduisant (dans le cas où γ est négatif et $= -\gamma_1$)

$$R_1 = 2\gamma_1 R, \quad z_1 = 2\gamma_1 z, \quad r_1 = 2\gamma_1 r, \quad d\tau = 8\gamma_1^3 ds.$$

---

[2]) Carl Störmer, Sur les trajectoires des corpuscules électrisés dans l'espace sous l'action du magnétisme terrestre avec application aux aurores boréales, Archives des Sciences Physiques et Naturelles, Genève, 1907.

[3]) Carl Störmer, Sur le mouvement d'un point matériel portant une charge d'électricité sous l'action d'un aimant élémentaire. Videnskabs-Selskabets Skrifter, Math. Naturv. Klasse, 1904, No 3, Oslo.

[4]) Voir [2]).

[5]) Carl Störmer, On the trajectories of electric corpuscles in space under the influence of terrestrial magnetism applied to aurora borealis and to magnetic disturbances, Archiv for Mathematik og Naturvidenskab, t. XXVIII, No 2, Oslo 1906.

En effet, on arrive alors [6]) au système

$$(5)\qquad \begin{cases} \dfrac{d^2R_1}{d\tau^2} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial U}{\partial R_1}, \\ \dfrac{d^2z_1}{d\tau^2} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial U}{\partial z_1}, \end{cases}$$

avec

$$(6)\qquad \left(\frac{dR_1}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{dz_1}{d\tau}\right)^2 = U + v^2,$$

où nous avons posé

$$U = -(R_1 r_1^3 - R_1^{-1})^2$$

et

$$v = (2r_1)^{-2}.$$

Dans le cas $\gamma = 0$ et $\gamma > 0$ on obtient des systèmes analogues.

Il faut aussi mentionner un système transformé, extrêmement utile pour l'intégration numérique des équations du mouvement. En effet, en posant

$$R = e^u \cos\lambda, \quad z = e^u \sin\lambda, \quad ds = e^{2u} d\sigma$$

on trouve [7])

$$(7)\qquad \begin{cases} \dfrac{d^2u}{d\sigma^2} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial P}{\partial u}, \\ \dfrac{d^2\lambda}{d\sigma^2} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial P}{\partial \lambda}, \end{cases}$$

$$\left(\frac{du}{d\sigma}\right)^2 + \left(\frac{d\lambda}{d\sigma}\right)^2 = P,$$

où

$$\frac{d\varphi}{d\sigma} = e^{-u} + 2\gamma\cos^{-2}\lambda,$$

$$P = e^{2u} - 4\gamma e^{-u} - 4\gamma^2\cos^{-2}\lambda - e^{-2u}\cos^2\lambda.$$

S'il s'agit de calculer une trajectoire venant de l'infini, on aura enfin des équations transformées correspondantes en posant

$$R = \frac{\mu}{S}, \quad z = \frac{\nu}{S}, \quad s = -\frac{1}{S}.$$

Nous ne les écrirons pas, mais renverrons le lecteur aux mémoires en question [8]).

---

[6]) Carl Störmer, Sur le mouvement des corpuscules électriques dans le champ d'un aimant élémentaire et la forme de leur trajectoire à leur arrivée à l'aimant, Archives des Sciences Physiques et Naturelles, Genève 1913.

[7]) Carl Störmer, Intégration d'un système d'équations différentielles qu'on rencontre dans l'étude d'un problème cosmique, Comptes Rendus Paris, t. 162, p. 829.

[8]) Carl Störmer, On the trajectories of electric particles in the field of a magnetic dipole with applications to the theory of cosmic radiation, fifth communication, Astrophysica Norvegica, vol. II, Oslo 1936.

3. Discussion qualitative des trajectoires. Quand il s'agit de faire une étude qualitative des trajectoires, les équations (2) et le système (5), (6) sont d'une importance capitale. En remarquant que

$$R\frac{d\varphi}{ds} = \sin\theta,$$

où θ est l'angle entre la tangente et le plan méridien passant par l'axe magnétique, l'équation (2) peut s'écrire

$$\sin\theta = \frac{2\gamma}{R} + \frac{R}{r^3}.$$

Comme $\sin\theta$ est compris dans l'intervalle -1 à 1, la fonction

$$\frac{2\gamma}{R} + \frac{R}{r^3}$$

ne peut non plus sortir de cet intervalle, ce qui définit, pour chaque valeur de la constante γ, un espace défendu, où la trajectoire ne peut passer. Nous ne mentionnerons pas ici de nombreuses conséquences que j'ai tirées de cette remarque pour la théorie des aurores boréales [9]). Aussi pour les rayons cosmiques des conséquences analogues ont été tirées par divers physiciens et par moi-même [10]).

Quant au système (5), (6), voilà comment il peut-être utilisé [11]).

Interprétons R_1 et z_1 comme les coordonnées cartésiennes d'un point matériel p de masse 1 dans un plan et τ comme le temps. Alors (5), (6) sont les équations de mouvement du point p sous l'action d'une force dépendant de la fonction de force $\frac{1}{2}U$. A chaque moment la vitesse du point p sera $(u^2 + v^2)^{1/2}$, c'est-à-dire égale à v à l'infini et sur la courbe

$$R_1^2 = r_1^3$$

et à zéro sur la courbe

$$U = -v^2.$$

On se forme aussitôt une idée très nette de la forme des trajectoires en désinnant une série de lignes de niveau $U = a$, a ayant une série de valeurs équidistantes; en effet, la force agissant sur le point p est alors toujours dirigée vers les a croissantes, et est normale aux lignes de niveau et sensiblement inversement proportionnelle à la largeur de la lamelle située entre deux lignes de niveau successives; elle est nulle au point $R_1 = 2$, $z_1 = 0$ et sur la ligne $R_1^2 = r_1^3$.

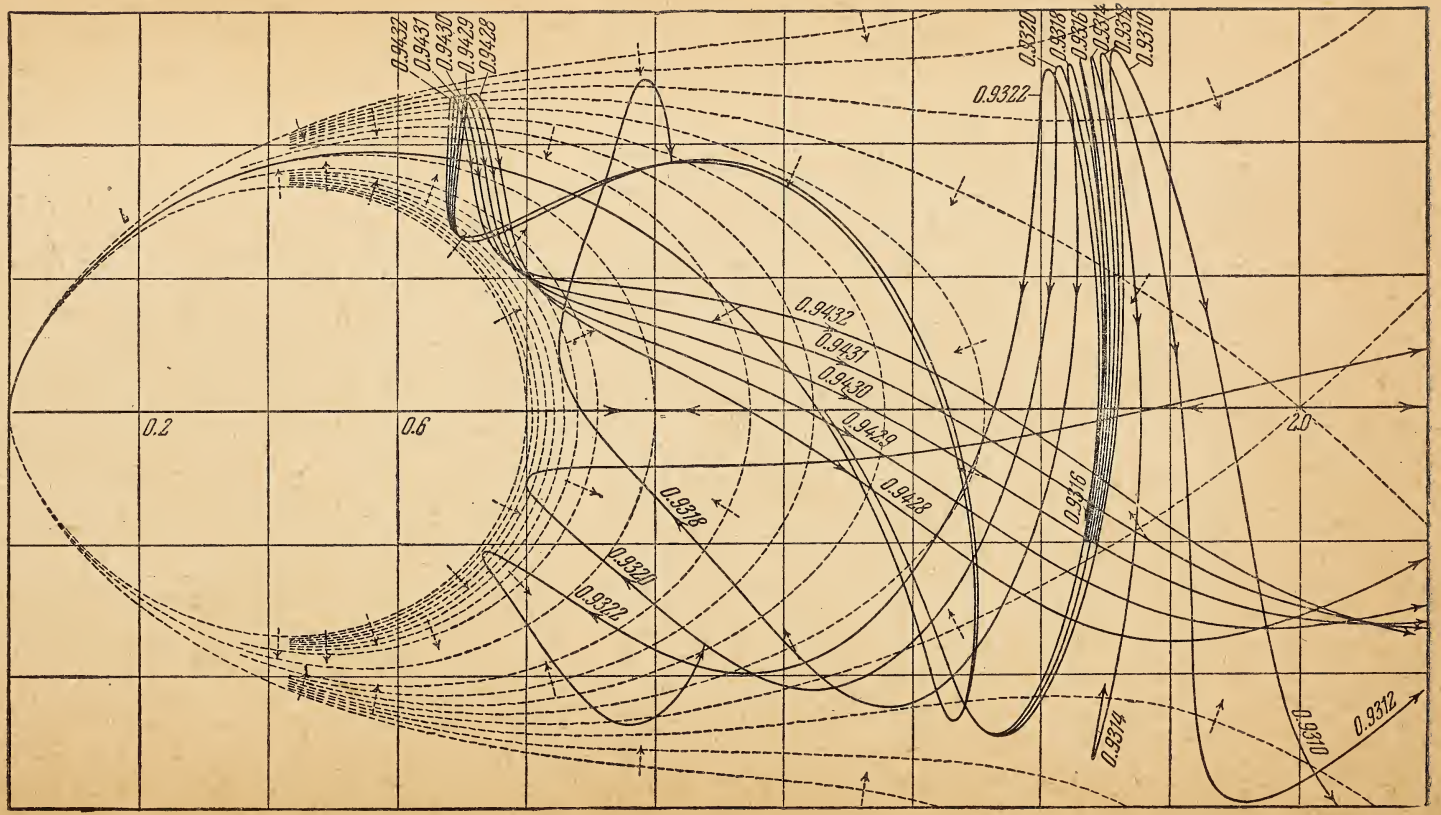
On obtient aussi une idée très intuitive de ces courbes intégrales en les comparant aux trajectoires d'une boule roulant sur un terrain où les lignes de niveau représentent les côtes géographiques, de manière que la ligne

---

[9]) Voir [2]).

[10]) B. Rossi, Rayons cosmiques, Actualités scientifiques et industrielles 248, Exposés de Physique atomique expérimentale, publié sous la direction de M. Maurice de Broglie, Paris 1935; Carl Störmer, On the trajectories etc. 1—5th communication, University Observatory, Oslo, Publication No 10 et 12, et Astrophysica Norvegica, vol. I et II.

[11]) Voir [6]).


0.9432
0.9431
0.9430
0.9429
0.9428
0.9320
0.9318
0.9316
0.9314
0.9312
0.9310
0.9322
0.2
0.6
2.0
0.9318
0.9320
0.9322
0.9316
0.9314
0.9310
0.9312

Фиг. 1.

$U = 0$ représente le fond d'une vallée et le point (2, 0) le point culminant d'un défilé reliant cette vallée à la terre basse s'étendant vers l'infini à la droite du défilé. L'analogie n'est pas parfaite, mais elle est très utile au point de vue de l'intuition.

Comme exemple bien instructif nous reproduisons sur la fig. 1 ce champ de force $U = a$ en lignes pointillées avec flèches dans la direction de la force.

Les courbes intégrales, chacune fournie avec la valeur correspondante de la constante γ_1, représentent alors les trajectoires d'un point qui est lancé de l'origine à gauche (l'aimant élémentaire) dans la direction des z positifs avec une vitesse

$$v = \left(\frac{1}{2r_1}\right)^2.$$

Une discussion de ces courbes intégrales se trouve dans un travail que j'ai publié en 1931 [12]). Les courbes ont été calculées par intégration numérique.

4. Calcul numérique des trajectoires. Ces discussions théoriques n'auraient que peu de valeur pour les applications aux problèmes cosmiques si elles ne pouvaient être complétées par des calculs très détaillés d'un grand nombre de trajectoires.

Grâce à une méthode d'intégration numérique des équations différentielles inventée pour le but [13]), mes assistants et moi avons pendant des années calculé des centaines de trajectoires de toutes sortes.

D'abord, depuis 1904 à 1919, plus de 5 000 heures de travail furent consacrées à ce travail, et depuis 1930, les calculs ont été repris avec un travail beaucoup plus considérable que celui des années 1904—1910. Les resources pécuniaires ont été fournies par des fondations scientifiques norvégiennes.

Surtout dans la théorie des rayons cosmiques si mystérieux, il est à espérer que ces calculs donneront enfin la solution d'une série d'énigmes non encore résolues. Pour les détails nous renvoyons aux mémoires spéciaux [14]).

---

[12]) Carl Störmer, How the horse-shoe-formed auroral curtains can be explained by the corpuscular theory, Terrestrial Magnetism and Atmospheric Electricity, Washington 1931.

[13]) Voir [2]). Ma méthode est adaptée aux équations de second ordre. Je ne savais pas à ce moment-là (1907) qu'une méthode semblable était développée par M. Adams pour des équations de premier ordre. Voir aussi: E. J. Nystrom, Ueber die numerische Integration von Differentialgleichungen, Acta Societatis Fennicae, t. I, No 13, p. 35, et Ernst Lindelöf, Remarques sur l'intégration numérique des équations différentielles ordinaires,, ibid., Nova Series, t. II, No 13, Helsingfors, 1938.

[14]) Voir [10]).

SUR UNE GÉNÉRALISATION DE LA CONSTANTE D'EULER.

Par Carl Störmer.

(Institute of Theoretical Astrophysics, Blindern, V. Aker, Norvège.)

1. Définition de la fonction *D*. Comme on le sait, la constante γ d'Euler

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}\left[1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln n\right] = 0{,}577\ldots$$

joue un rôle fondamental dans plusieurs parties des mathématiques supérieures. En 1899 je me suis occupé d'une étude sur une généralisation de la fonction Gamma, mais ayant appris que de pareilles fonctions avaient déjà été étudiées par Heine, je n'en ai rien publié.

Cependant, aux cours de ces recherches je fus amené à une généralisation naturelle de la constante d'Euler, qui sera peut-être d'un certain intérêt et que je n'ai pas vu non plus dans la littérature. Voici en quoi elle consiste.

Soient, comme dans la théorie des fonctions elliptiques, ω_1 et ω_2 deux nombres dont le rapport

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \tau$$

est complexe avec la partie imaginaire positive, et soit

$$V_n = \frac{\pi}{\tau}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{\tau}+\frac{\pi}{\tau}\operatorname{ctg}\frac{2\pi}{\tau}+\ldots+\frac{\pi}{\tau}\operatorname{ctg}\frac{n\pi}{\tau}-\ln\left(\frac{\tau}{\pi}\sin\frac{n\pi}{\tau}\right).$$

Pour logarithme naturel $\ln\left(\frac{\tau}{\pi}\sin\frac{n\pi}{\tau}\right)$ on choisit la détermination, qui est réelle quand $\frac{\tau}{\pi}\sin\frac{n\pi}{\tau}$ est réel et positif, ce qui aura lieu quand $\frac{\omega_2}{\omega_1}$ est purement imaginaire et positif.

Supposons que n tende vers l'infini τ étant fixe. V_n s'approchera alors, comme nous allons le voir, d'une limite qui sera une fonction de τ et que nous désignerons par $D(\tau)$ ou par $D(\omega_1, \omega_2)$ si l'on veut préciser les constantes ω_1 et ω_2. On aura donc

$$D(\tau) = D(\omega_1, \omega_2) = \lim_{n\to\infty} V_n.$$

Comme pour k et n fixes

$$\lim_{|\tau|\to\infty}\left(\frac{\pi}{\tau}\operatorname{ctg}\frac{k\pi}{\tau}\right) = \frac{1}{k}, \qquad \lim_{|\tau|\to\infty}\ln\left(\frac{\tau}{\pi}\sin\frac{n\pi}{\tau}\right) = \ln n$$

on aura

$$\lim_{|\tau|\to\infty} V_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n.$$

Donc

$$\lim_{n\to\infty} \left[\lim_{|\tau|\to\infty} V_n \right] = \gamma.$$

Nous allons voir plus tard que les opérations peuvent être permutées, de manière que l'on ait aussi

$$\lim_{|\tau|\to\infty} \left[\lim_{n\to\infty} V_n \right] = \gamma,$$

c'est-à-dire

$$\lim_{|\tau|\to\infty} D(\tau) = \gamma.$$

2. Expression de D comme fonction de τ. Série de Lambert. En posant

$$e^{-\frac{2\pi i}{\tau}} = \xi,$$

on aura

$$\frac{\pi}{\tau} \operatorname{ctg} \frac{k\pi}{\tau} = \frac{\pi i}{\tau} + \frac{2\pi i}{\tau} \frac{\xi^k}{1-\xi^k}$$

et

$$\ln\left(\frac{\tau}{\pi} \sin\frac{n\pi}{\tau}\right) = n\frac{\pi i}{\tau} + \ln(1-\xi^n) - \ln\frac{2\pi i}{\tau}.$$

Donc

$$V_n = \ln\frac{2\pi i}{\tau} + \frac{2\pi i}{\tau}\left(\frac{\xi}{1-\xi} + \frac{\xi^2}{1-\xi^2} + \ldots + \frac{\xi^n}{1-\xi^n}\right) - \ln(1-\xi^n).$$

Comme τ a sa partie purement imaginaire positive, la partie réelle de $-\frac{2\pi i}{\tau}$ sera négative, donc $|\xi| < 1$. La série entre parenthèses sera donc convergente pour $n \to \infty$, et la limite de V_n existe, c'est-à-dire

$$D(\tau) = \ln\frac{2\pi i}{\tau} + \frac{2\pi i}{\tau}\left(\frac{\xi}{1-\xi} + \frac{\xi^2}{1-\xi^2} + \frac{\xi^3}{1-\xi^3} + \ldots\right),$$

où la série entre parenthèses est la célèbre série de Lambert.

Cette série a, comme on le sait, une foule de propriétés remarquables. Elle a d'une part des analogies avec des séries qu'on rencontre dans la théorie des fonctions elliptiques, et d'autre part elle est un cas spécial des fonctions de Heine [1]); par exemple, les fonctions de Heine

$$\frac{x}{1-x}\varphi(1, 1, 2, g, \eta) = \frac{x}{1-g} + \frac{x^2}{1-g^2} + \frac{x^3}{1-g^3} + \ldots$$

et

$$\Phi(g, \eta) = \frac{gx}{1-gx} + \frac{g^2x}{1-g^2x^2} + \frac{g^3x}{1-g^3x^3} + \ldots,$$

où

$$x = g^\eta,$$

[1]) E. Heine, Theorie der Kugelfunktionen I, pp. 97—125, G. Reimer, Berlin 1878.

se réduisent à la série de Lambert pour des valeurs particulières des variables x et g.

3. Limite de D, quand $|\tau|$ tend l'infini. Pour trouver cette limite, on peut appliquer une formule de Mellin [2]), généralisant un résultat de Schlömilch. En effet, Mellin a trouvé la formule

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{e^{(w+n)x}-1} = -[\psi(w)+\ln x]\,x^{-1} +$$

$$+\sum_{\nu=0}^{k} (-1)^{\nu} \frac{\zeta(-\nu)\,\zeta(-\nu,\,w)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots\nu}\,x^{\nu} + \frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \Gamma(z)\,\zeta(z)\,\zeta(z,\,w)\,x^{-z}\,dz,$$

où

$$-k-1<a<-k,\quad \psi(w)=\frac{\Gamma'(w)}{\Gamma(w)},\quad \zeta(z)=1+\frac{1}{2^z}+\frac{1}{3^z}+\ldots$$

et où

$$\zeta(z,\,w)=\frac{1}{w^z}+\frac{1}{(w+1)^z}+\frac{1}{(w+2)^z}+\ldots$$

Dans notre cas $w=1$, donc $\psi(w)=-\gamma$ et

$$\zeta(z,\,w)=\zeta(z)$$

et si l'on remarque avec Mellin, que $\zeta(0)=-\frac{1}{2}$ et que l'on a, si ν est un entier positif,

$$\zeta(-2\nu)=0,\quad \zeta(1-2\nu)=(-1)^{\nu}\frac{B_{\nu}}{2\nu},$$

où B_{ν} est le $\nu^{\text{ième}}$ nombre Bernoullien, c'est-à-dire

$$B_1=\frac{1}{6},\quad B_2=\frac{1}{30},\quad B_3=\frac{1}{42},\ldots,$$

on trouve (Mellin):

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-nx}}{1-e^{-nx}}=\frac{\gamma-\ln x}{x}+\frac{1}{4}-$$

$$-\frac{B_1^2}{2}\frac{x}{1\cdot 2}-\frac{B_2^2}{4}\frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}-\ldots-\frac{B_n^2}{2n}\frac{x^{2n-1}}{1\cdot 2\cdot 3\ldots 2n}+R_{2n+1},$$

où

$$R_{2n+1}=\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\Gamma(z)\,[\zeta(z)]^2\,x^{-z}\,dz$$

avec

$$-2n-1<a<-2n.$$

En posant ici $x=\frac{2\pi i}{\tau}$, on en déduit

$$D(\tau)=\gamma+\frac{1}{4}\frac{2\pi i}{\tau}-\frac{B_1^2}{2}\frac{(2\pi i/\tau)^2}{1\cdot 2}-\frac{B_2^2}{4}\frac{(2\pi i/\tau)^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}-\ldots$$

$$\ldots-\frac{B_n^2}{2n}\frac{(2\pi i/\tau)^{2n}}{1\cdot 2\cdot 3\ldots 2n}+\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\Gamma(z)\,[\zeta(z)]^2\left(\frac{2\pi i}{\tau}\right)^{-z+1}dz,$$

[2]) Hj. Mellin, Ueber eine Verallgemeinerung der Riemanschen Funktion $\zeta(s)$, Acta Societ. Scient. Fennicae, t. XXIV (1899), No 10.

où $-2n-1<a<-2n$ et où il faut choisir la détermination de $\left(\frac{2\pi i}{\tau}\right)^{-z+1}$, de manière que la formule soit vraie (voir le mémoire de Mellin).

Puisque le reste, comme l'a fait remarquer Mellin, tend vers zéro plus vite que $\left(\frac{2\pi i}{\tau}\right)^{2n+1}$, on aura ici une formule asymptotique pour la fonction $D(\tau)$. En particulier

$$\lim_{|\tau|\to\infty} D(\tau)=\gamma,$$

c. q. f. d.

4. Sur une fonction se réduisant à $D(\tau)$ dans un cas particulier. Dans mes anciennes recherches, la fonction $D(\tau)$ était un cas particulier de l'expression limite

$$\lim_{n\to\infty} U_n,$$

où

$$U_n=\frac{\pi}{\tau}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{\tau}x+\frac{\pi}{\tau}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{\tau}(1+x)+\frac{\pi}{\tau}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{\tau}(2+x)+\ldots$$
$$\ldots+\frac{\pi}{\tau}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{\tau}(n-1+x)-\ln\left(\frac{\tau}{\pi}\sin\frac{\pi}{\tau}(n-1+x)\right),$$

expression qui se réduit à V_n, si $x=1$. On aura alors

$$\lim_{n\to\infty} U_n=\ln\frac{2\pi i}{\tau}-\frac{\pi i}{\tau}(x-1)+\frac{2\pi i}{\tau}\left(\frac{\xi^x}{1-\xi^x}+\frac{\xi^{x+1}}{1-\xi^{x+1}}+\frac{\xi^{x+2}}{1-\xi^{x+2}}+\ldots\right),$$

où

$$\xi=e^{-\frac{2\pi i}{\tau}}.$$

La formule de Mellin appliquée à cette expression fait voir que si $|\tau|\to\infty$ on aura comme limite la fonction $-\psi(x)$; donc pour $x=1$, la constante γ, comme auparavant.

Cette fonction limite $\lim_{n\to\infty} U_n$ sera peut-être la généralisation la plus naturelle de la fonction $\psi(x)$; par intégration on en déduit une généralisation correspondante de la fonction Gamma. Comme ces recherches n'ont cependant qu'un intérêt historique, nous les omettrons ici.

Remarquons enfin qu'on arrive à des résultats très intéressants si l'on applique, dans l'intégrale de Mellin, l'équation fonctionelle bien connue de la fonction zéta et qu'on transforme l'intégrale en introduisant des nouvelles variables et en modifiant le contour d'intégration. Nous reviendrons peut-être à cette recherche dans un mémoire ultérieur.

СПИСОК ТРУДОВ АКАДЕМИКА Д. А. ГРАВЕ.

1. Об идеальной форме оптического стекла без сферической аберрации. Записки физико-математического общества студентов Петербургского университета, т. I (1884—85), стр. 3—13.

2. Об интегрировании одного класса совокупных диференциальных уравнений. Записки физико-математического общества студентов Петербургского университета, т. II (1885), стр. 11—25.

3. О поверхностях Minima. Записки физико-математического общества студентов Петербургского университета, т. II (1885), стр. 99—108, 115—126, 131—167. Издано отдельным оттиском под названием „О наименьших поверхностях. Рассуждение на степень кандидата математики“ (Петербург 1886).

4. Об одном классе линейных уравнений второго порядка, интегрируемых в квадратурах. Математический сборник, т. XIV (1889), стр. 197—201.

5. Об интегрировании частных диференциальных уравнений первого порядка. Диссертация на степень магистра чистой математики. Петербург 1889, 99 стр.

6. Курс аналитической геометрии. Петербург 1893, 652 стр.

7. О проекциях поверхности вращения на плоскости, в которых сохраняются площади, причем меридианы изображаются прямыми, а параллели — кругами. Известия Петербургской Академии наук, V сер., т. I (1894), стр. 73—85.

8. Sur une question de Tchébycheff. Association Française pour l'avancement des sciences. Compte rendu de la 23me session. Congrès de Caen (1894), стр. 196—199.

9. Sur le problème de Dirichlet. Association Française pour l'avancement des sciences. Compte rendu de la 24me session. Congrès de Bordeaux (1895), стр. 111—136.

10. Заметка, написанная в память последнего в жизни Пафнутия Львовича Чебышева математического разговора. О правиле Чебышева для приближенного спрямления дуг. Известия Петербургской Академии наук, V сер., т. II (1895), стр. 131—134.

11. Об изображениях шара на плоскости с сохранением площадей. Известия Русского Астрономического общества, вып. IV (1895), 15 стр.

12. Sur le problème de trois corps. Nouvelles Annales de mathématiques (3), т. 15 (1896), стр. 537—547.

13. Об основных задачах математической теории построения географических карт. Диссертация на степень доктора чистой математики. Петербург 1896, 197 стр.

14. Sur la construction des cartes géographiques. Journal de mathématiques pures et appliquées (5), т. 2 (1896), стр. 317—361.

15. De la meilleure représentation d'une contrée donnée. Association Française pour l'avancement des sciences. Compte rendu de la 25me session. Congrès de Tunis (1896), стр. 106—115.

16. К интегрированию системы диференциальных уравнений линейных в частных производных высших порядков. Протоколы Петербургского Математического общества за 1890—1899 гг., стр. 15 и 17 (изложение двух докладов).

17. Об одной эллиптической функции. Протоколы Петербургского Математического общества за 1890—1899 гг., стр. 110—111 (изложение доклада).

18. Sur les expressions dites surpuissances. Nouvelles Annales de mathématiques (3), т. 17 (1898), стр. 80—91.

19. Sur les lignes composées de parties rectilignes. C. R. Acad. Sci. Paris, т. 127 (1898), стр. 1005—1007.

20. Об основных предложениях теории функций двух вещественных переменных. Сообщения Харьк. матем. общества (2), т. VI (1898), стр. 251—287.

21. Новое доказательство основной теоремы учения о неявных функциях. Сообщения Харьк. матем. общества (2), т. VI (1898), стр. 288—293.

22. Об одной теореме проективной геометрии. Математический сборник, т. XXII (1901), стр. 239—242.

23. О некоторых приложениях определителей. Математический сборник, т. XXII (1901), стр. 243—253.

24. Об одном видоизменении задачи о курьерах. Записки Харьковского университета за 1901 г., кн. 3, стр. 1—6.

25. Об одной теореме, относящейся к линейчатым поверхностям второго порядка. Записки Харьковского университета за 1901 г., кн. 3, стр. 7—8.

26. Un cas remarquable de transformation rationnelle de l'espace. C. R. Acad. Sci. Paris, т. 134 (1902), стр. 1345—1346.

27. О некоторых свойствах ковариантa Hesse. Киев, Университетские известия за 1903 г., № 6, стр. 1—9. Также Отчет и протоколы физико-математического общества при Киевском университете за 1902 г., стр. 1—9.

28. О теореме Бертрана. Киев, Университетские известия за 1904 г., № 10, стр. 11—19. Также Отчет и протоколы физико-математического общества при Киевском университете за 1903 г., стр. 11—19.

29. О линиях третьего порядка. Киев, Университетские известия за 1904 г., № 10, стр. 33—49. Также Отчет и протоколы физико-математического общества при Киевском университете за 1903 г., стр. 33—49.

30. Теория групп. Киев 1908, 204 стр. Печаталось также под названием „Лекции по алгебраическому анализу“ в Киевских Университетских известиях, № 7 за 1904 г., № 10 за 1905 г., № 11 за 1908 г.

31. Zur Theorie der elliptischen Funktionen. Киев, Университетские известия за 1908 г., № 9, стр. 1—7. Также Отчет и протоколы физико-математического общества при Киевском университете за 1907 г., стр. 1—7.

32. Значение математики в естествознании. Киев, Университетские известия за 1908 г., № 12, стр. 1—17. Издано также отдельной брошюрой (Киев 1908).

33. Элементарный курс теории чисел. 1-е изд. Киев 1909, 340 стр. Печаталось также в Киевских Университетских известиях, №№ 2, 3, 7, 8, 10 за 1909 г., №№ 3, 4 за 1910 г. То же, 2-е значительно переработанное издание, Киев 1913, 416 стр.

34. Sur une identité dans la théorie des formes binaires quadratiques. C. R. Acad. Sci. Paris, т. 149 (1909), стр. 770—772.

35. Sur les équations du cinquième degré résolubles algébriquement, quand le produit des racines reste arbitraire. Bulletin des sciences mathématiques (2), т. 34 (1910), стр. 23—29.

36. Введение в анализ. Иррациональные числа и пределы. Киев 1910, 155 стр. Печаталось также в Киевских Университетских известиях, №№ 1, 2, 3, 9 за 1910 г.

37. Элементы теории эллиптических функций. Выпуск I. Киев 1910, 169 стр. Печаталось также под названием „Теория эллиптических функций" в Киевских Университетских известиях, № 7 за 1910 г., № 6 за 1912 г.

38. Курс алгебраического анализа. Киев 1910, 512 стр. (литогр.).

39. Арифметическая теория алгебраических величин, т. I, Квадратичная область. Киев 1910, 372 стр. (литогр.).

40. Démonstration d'un théorème de Tchébycheff généralisé. Journal für die reine und angewandte Mathematik, т. 140 (1911), стр. 247—251.

41. К вопросу об особенных точках алгебраических образов. Сборник статей, посвященных профессору Г. К. Суслову. Киев 1911, стр. 169—170. Также Отчет и протоколы физико-математического общества при Киевском университете за 1910 г., стр. 71—72.

42. Об алгебраических единицах. Сборник статей, посвященных профессору Г. К. Суслову. Киев 1911, стр. 209—233. Напечатано также в Киевских Университетских известиях, № 5 за 1912 г. и в Отчете и протоколах физико-математического общества при Киевском университете за 1911 г., стр. 19—43. Издано отдельной брошюрой (Киев 1911).

43. Основы аналитической геометрии. Часть I. Геометрия на плоскости. Киев 1911, 492 стр. Печаталась также в Киевских Университетских известиях, № 8 за 1910 г., №№ 4, 7, 9 за 1911 г., №№ 1, 2 за 1912 г. Часть II. Геометрия в пространстве. Киев 1913, 224 стр. (литогр.).

44. Comment on écrit les revues encyclopédiques. Киев, Университетские известия за 1912 г., № 10, стр. 1—2. Также Отчет и протоколы физико-математического общества при Киевском университете за 1911 г., стр. 201—202.

45. Энциклопедия математики. Очерк ее современного положения. Киев 1912, 601 стр. Печаталось также в Известиях Киевского Коммерческого института, кн. IX—XII (1911).

46. Математика страхового дела. Киев 1912, 87 стр.

47. Арифметическая теория алгебраических величин, т. II. Теория идеалов. Киев 1912, 132 стр. Печаталось также в Киевских Университетских известиях, №№ 1, 2, 3 за 1913 г.

48. О таблице характеров Коркина. Математический сборник, т. XXIX (1913), стр. 7—11.

49. Об основных положениях теории Galois. Математический сборник, т. XXIX (1914), стр. 153—170.

50. Sur la généralisation d'un théorème de St. Smith. Киев, Университетские известия за 1914 г., № 6, стр. 59—60. Также Отчет и протоколы физико-математического общества при Киевском университете за 1913 г., стр. 59 — 60.

51. Correction d'une table de Cayley. Киев, Университетские известия за 1914 г., № 6, стр. 61. Также Отчет и протоколы физико-математического общества за 1913 г., стр. 61.

52. Элементы высшей алгебры. Киев 1914, 698 стр.

53. Sur les sommes de Gauss. Сообщения Харьк. матем. общества (2), т. XIV (1915), стр. 202—208.

54. О периодических непрерывных дробях. Сообщения Харьк. матем. общества (2), т. XIV (1915), стр. 239—246.

55. Начала алгебры. Петроград 1915, 316 стр. То же в переводе на украинский язык: Основи алгебри. Киев 1919, 266 стр.

56. Теория пенсионных касс. Киев 1917, 68 стр.

57. Письмо К. Ф. Гаусса к Г. В. Ольберсу, найденное в Киевской обсерватории. Журнал чистого и прикладного знания, отдел физико-математических и технических наук, т. I, вып. I, стр. 1—4 (Одесса 1921). То же, по-немецки, с приложением фотокопии: Ein neuentdeckter Brief von C. F. Gauss an H. W. Olbers. Записки фізично-математичного відділу ВУАН, т. I, вип. 2 (1924), стр. 91—95.

58. Как устроена вселенная. Популярный очерк. Киев 1923, 58 стр.

59. Sur un théorème d'Euler. Записки фізично-математичного відділу ВУАН, т. I, вип. 1 (1923), стр. 1—3.

60. Sur les racines cinquièmes de l'unité. Записки фізично-математичного відділу ВУАН, т. I, вип. I (1923), стр. 4—6.

61. Généralisation d'un théorème d'Abel. Записки фізично-математичного відділу ВУАН, т. I, вип. 1 (1923), стр. 7—8.

62. Математика социального страхования. Общедоступное изложение для не-специалистов. Ленинград 1924, 151 стр.

63. Краткий курс математического анализа. Руководство для вузов и самообразования. Киев 1924, 368 стр.

64. Об основных положениях теории идеальных чисел. Математический сборник, т. XXXII (1925), стр. 135—151.

65. О разложении простых чисел на идеальные множители. Математический сборник, т. XXXII (1925), стр. 542—560.

66. О единицах конечного поля. Математический сборник, т. XXXII (1925), стр. 562—568.

67. Über den Zusammenhang zwischen Astronomie, Meteorologie und Botanik. Записки фізично-математичного відділу ВУАН, т. I, вип. 3 (1925), стр. 53—55.

68. Über ein Poincaré'sches Problem. Записки фізично-математичного відділу ВУАН,т. I, вип. 3 (1925), стр. 57—59.

69. Über die elektromagnetischen Grundlagen der Mechanik. Записки фізично-математичного відділу ВУАН, т. I, вип. 3 (1925), стр. 84—90.

70. Ueber die Plotnikowsche Zahl. Записки фізично-математичного відділу ВУАН, т. I, вип. 4 (1925), стр. 5.

71. Historische Bemerkungen. Записки фізично-математичного відділу ВУАН, т. I, вип. 4 (1925), стр. 6—7.

72. Über die Rollbewegung einer schweren homogenen Kugel auf zwei Kegeln. Записки фізично-математичного відділу ВУАН, т. I, вип. 4 (1925), стр. 8—11.

73. Електромагнетні сили в сонячній системі. Збірник математично-природописно-лікарської секції Наукового Товариства імени Шевченка, т. XXIII—XXIV (Львов 1925), стр. 43—46. То же по-немецки: Über die elektromagnetischen Erscheinungen im Sonnensysteme. Записки фізично-математичного відділу ВУАН, т. II, вип. 2 (1927), стр. 9—12.

74. Об уравнениях Эйлера и их приложениях к теории упругостей. Известия Академии наук СССР, VI сер., т. XX (1926), стр. 917—942.

75. Роля Schwarz'евої функції у теорії лінійних диференціяльних рівнянь вищого порядку. Записки фізично-математичного відділу ВУАН, т. II, вип. 1 (1926), стр. 1—5.

76. Про кривизну понад просторів. Записки фізично-математичного відділу ВУАН, т. II, вип. 1 (1926), стр. 41—48.

77. Основи теорії Galois. Записки фізично-математичного відділу ВУАН, т. II, вип. 1 (1926), стр. 49—55.

78. Sur le mouvement du périhélie de Mercure (совместно с Ю. Д. Соколовым). Труди фізично-математичного відділу ВУАН, т. V, вип. 1 (1926), стр. 1—11.

79. Теорія відносності в історичній перспективі. Збірник історично-філологичного відділу ВУАН, № 51, стр. 220—237 (=Юбілейний збірник на пошану акад. Д. Багалія, ч. I), Киев 1926.

80. Закон Гука в теории упругости. Журнал Киевского Института народного хозяйства, т. I (1926), стр. 111—113.

81. О резонансе. Журнал Киевского Института народного хозяйства, т. I (1926), стр. 114—116.

82. Плоская геометрия Эвклида как предельная для геометрии Лобачевского. In memoriam N. I. Lobatschevsckii, т. II. (Казань 1927), стр. 25—36.

83. Über eine Tchébycheffsche Frage. Збірник математично-природописно-лікарської секції Наукового Товариства імени Шевченка, т. XXVI (Львов 1927), стр. 45—50.

84. Über die linearen Differentialgleichungen, die in Bezug auf die lineare gebrochene Transformationsgruppe invariant sind. Journal für die reine und angewandte Mathematik, т. 156 (1927), стр. 164—175.

85. Flächentreue Abbildungen der Flächen auf die Ebene. Mathematische Zeitschrift, т. 26 (1927), стр. 691—693.

86. О решении линейных диференциальных уравнений при помощи определенных интегралов. Известия Академии наук СССР, VI сер., т. XXI (1927), стр. 943—952.

87. Про Лапласове рівняння. Записки фізично-математичного відділу ВУАН, т. II, вип. 3 (1927), стр. 1—4.

88. По поводу магнитных аномалий. Доклады Академии наук СССР за 1928 г., стр. 316—318.

89. Электрическая гиператмосфера и земной магнетизм. Известия Академии наук СССР, VII сер., Отделение физико-математических наук, 1928, № 4—5, стр. 347—366.

90. Über eine allgemeine Methode zur Bildung von Differentialausdrucken, die in Bezug auf eine kontinuierliche Transformationsgruppe invariant bleiben (совместно с Н. Г. Чеботаревым). Записки фізично-математичного відділу ВУАН, т. III, вип. 1 (1928), стр. 53—59.

91. Малые колебания и некоторые предложения алгебры. Известия Академии наук СССР, VII сер., Отделение физико-математических наук, 1929, № 6, стр. 563—570.

92. Les nouveaux principes de la mécanique céleste. Труди фізично-математичного відділу ВУАН, т. IX (1929), стр. 325—335.

93. Über die Summenformeln. Записки фізично-математичного відділу ВУАН, т. IV, вип. 5 (1930), стр. 269—280.

94. Сопротивление жидкости движению тел. Труды Первого Всесоюзного съезда математиков (Харьков 1930), стр. 318—327, Москва 1936.

95. Теоретична механіка на основі техніки. 1-е изд., Харьков 1930, 394 стр., 2-е изд., Харьков 1932, 364 стр. Русское издание: Теоретическая механика на основе техники. Москва 1932, 406 стр.

96. Математика та її застосування. Журнал Математичного циклу ВУАН, Anno I, № 1 (1931), стр. 3—14.

97. Про рух стискуваного течива. Журнал Математичного циклу ВУАН, Anno II, № 2 (1932), стр. 55—59.

98. В какую сторону должны вращаться горизонтальные гидравлические турбины? Известия Академии наук СССР, VII сер., Отделение математических и естественных наук, 1932, № 1, стр. 39—42.

99. О действии одноцилиндровой паровой машины. Известия Академии наук СССР, VII сер., Отделение математических и естественных наук, 1932, № 4, стр. 503—509.

100. Физические основы гидро- и аэродинамики. Известия Академии наук СССР, VII сер., Отделение математических и естественных наук, 1932, № 6, стр. 763—782.

101. Зв'язок теорії еліптичних функцій з теорією ідеалів. Журнал Математичного циклу ВУАН, Anno III, № 2 (1933), стр. 3—13.

102. Про узагальнення алгоритма Вороного. Журнал Математичного циклу ВУАН, Anno III, № 2 (1933), стр. 17—23.

103. О движении сжимаемой жидкости. Известия Академии наук СССР, VII сер., Отделение математических и естественных наук, 1933, № 5, стр. 653—658.

104. Об одном обобщении теоремы Акселя Туе. Доклады Академии наук СССР за 1933 г., № 6, стр. 263.

105. Аналітична геометрія. Киев 1933, 308 стр.

106. Ідеальні модулі алгебричних функцій. Журнал Математичного циклу ВУАН, Anno III, № 4 (1934), стр. 23—31.

107. Методи боротьби з труднощами великої задачі Фермата. Журнал Математичного циклу ВУАН, Anno III, № 4 (1934), стр. 33—44.

108. Кавітація і корозія швидкорушних гідравлічних турбин. Журнал Математичного циклу ВУАН, Anno III, № 4 (1934) стр. 85—90.

109. Про прості числа виду $p = 4n + 3$. Журнал Математичного циклу ВУАН, Anno III, № 4 (1934), стр. 91—95.

110. Про деякі квадратичні поля. Журнал Математичного циклу ВУАН, Anno III, № 4 (1934), стр. 97—112.

111. Аксоіди руху твердого тіла. Журнал Інституту Математики ВУАН за 1934 г., № 1, стр. 3—9.

112. Функції математичної фізики і гіпергеометричний ряд. Журнал Інституту Математики ВУАН за 1934 г., № 3—4, стр. 3—23.

113. Арифметична теорія алгебричних величин. Журнал Інституту Математики ВУАН за 1934 г., № 3—4, стр. 25—44.

114. Про Euler-ові інтеграли. Журнал Інституту Математики ВУАН за 1934 г., № 3—4, стр. 45—61.

115. Поверхні Riemann-а і теорія електрики. Журнал Інституту Математики ВУАН за 1935 г., № 1.

116. Algorithme du calcul des racines des équations algébriques. Журнал Інституту Математики ВУАН за 1936 г., № 2, стр. 3—20.

117. Інститут Математики АН УРСР до XX роковин Великої Жовтневої Революції. Журнал Інституту Математики АН УРСР за 1937 г., № 3, стр. 3—17.

118. Принципи теорії Галуа. Журнал Інституту Математики АН УРСР за 1937 г., № 3, стр. 65—71.

119. Про одну задачу Ейлера. Журнал Інституту Математики АН УРСР за 1937 г., № 3, стр. 73—74.

120. Про неможливість алгебричного розвъязання загального рівняння вище четвертого степеня. Журнал Інституту Математики АН УРСР за 1937 г., № 4, стр. 3—8.

121. Про загальну показникову функцію. Журнал Інституту Математики АН УРСР за 1937 г., № 4, стр. 43—45.

122. Трактат з алгебричного аналізу, т. I. Початки науки. Київ, Видавництво АН УРСР, 1938 г., стр. 196.

123. Трактат з алгебричного аналізу, т. II, Історичний огляд. Київ, Видавництво АН УРСР, 1938 г., стр. 399.

124. Трактат алгебраического анализа т. I, Начала науки. Издательство АН УССР, Киев, 1938 г., стр. 196.

125. Трактат алгебраического анализа т. II, Исторический обзор. Киев, Издательство АН УССР, 1939 г., стр. 411.

126. Про один помилковий приклад в теорії чисел. Збірник праць Інституту Математики АН УРСР, № 3, за 1939 г., стр. 63—64.

СОДЕРЖАНИЕ

Стр.

Н. Г. Чеботарев. Академик Дмитрий Александрович Граве. 3
Н. И. Ахиезер и М. Г. Крейн. О некоторых формулах квадратур П. Чебышева и А. Маркова 15
H. Bohr. Zum Picardschen Satz 29
В. П. Вельмин. О приближенном выражении e^x через алгебраические функции 34
B. Hostinský. Sur le coéfficient de correlation 48
Б. Н. Делоне. К геометрии теории Галуа 52
А. П. Дицман. Некоторые теоремы о бесконечных группах. 63
E. Zylinski. Sur la méthode des multiplicateurs de Lagrange 68
E. Cartan. Sur une classe de surfaces apparentées aux surfaces R et aux surfaces de Jonas 72
Б. М. Коялович. К вопросу об интегрировании диференциального уравнения $y\,dy - y\,dx = R(x)\,dx$ 79
М. Г. Крейн. О нагруженных интегральных уравнениях, функции распределения которых не монотонны 88
А. А. Кулаков. О регулярном представлении абстрактной группы . . . 104
А. Г. Курош. Теорема Жордана-Гельдера в произвольных структурах . 110
Н. Н. Мейман. О продолжаемых полиномах II. Об R-продолжаемых полиномах 117
P. Montel. Sur quelques propriétés des couples de fonctions uniformisantes 166
Д. Д. Мордухай-Болтовской. О росте трансцендентной функции, выражаемой в конечном виде с помощью элементарных трансцендентных 172
В. В. Морозов. О примитивных группах в трех переменных. 193
A. Ostrowski. Sur la convergence et l'estimation des erreurs dans quelques procédés de résolution des équations numériques 213
Е. Я. Ремез. О некоторых оценках наилучшего приближения и в частности об одной основной теореме Валле Пуссена 235
А. К. Сушкевич. Исследования о бесконечных подстановках 245
В. К. Туркин. О сопряженных элементах в конечных группах 254
В. К. Туркин. О характерах мономиальных групп 259
M. Fréchet. Sur les espaces distanciés 265
Н. Г. Чеботарев. О продолжаемых полиномах I. Общая постановка проблемы 268
Н. Г. Чеботарев. Задача из теории алгебраических чисел 283
О. Ю. Шмидт. Группы с двумя классами неинвариантных подгрупп . . 291
C. Störmer. Sur une recherche qualitative et quantitative d'un système d'équations différentielles jouant un rôle important dans la physique cosmique 310
C. Störmer. Sur uue généralisation de la Constante d'Euler 316
Список трудов академика Д. А. Граве 320

UNIVERSITY OF CALIFORNIA LIBRARY
Los Angeles
This book is DUE on the last date stamped below.

FEB 8 1972
INTERLIBRARY LOANS JAN 31 1972
JAN 31 1972
TWO WEEKS FROM DATE OF RECEIPT
NON-RENEWABLE
MAR 15 1972
MAR 17 RECD

Form L9–10m-6,'52(A1855)444

UNIVERSITY OF CALIFORNIA-LOS ANGELES
L 010 705 689 7
Engineering &
Mathematical
Sciences
Library
QA 22
G785L